

Übungen zur Analysis einer Variablen

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 9

Aufgabe 1 Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die gegen x konvergiert. Zeigen Sie, dass dann auch $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen x konvergiert.

Aufgabe 2

(a) Beweisen Sie die folgende Version des *Quotientenkriteriums*:

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$. Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

Hinweis: Zeigen Sie, dass es für die durch $b_n = \sup \left\{ \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \mid k \geq n \right\}$ definierte Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n < \lambda < 1$ und ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \lambda$ für alle $n \geq N$ erfüllt ist.

Bemerkung: Darüber hinaus lässt sich zeigen, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert, wenn gilt $\liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$. Im Falle $\liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq 1 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ lässt sich keine Konvergenzaussage machen.

(b) Beweisen Sie die folgende Version des *Wurzelkriteriums*:

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$. Dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.

Bemerkung: Gilt dagegen $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, so divergiert die Reihe (die Glieder bilden keine Nullfolge), im Falle $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ lässt sich keine Konvergenzaussage treffen (beachten Sie, dass es im Falle des Wurzelkriteriums im Gegensatz zum Quotientenkriterium kein "lim inf-Kriterium" gibt).

Aufgabe 3

- (a) Sei $(\mathcal{A}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine abzählbare Familie von Mengen. Beweisen Sie die *De Morgan'schen Regeln*:

$$\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_i\right)^C = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} (\mathcal{A}_i)^C \text{ sowie } \left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_i\right)^C = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (\mathcal{A}_i)^C$$

Hinweis: Um die Gleichheit zweier Mengen $M = N$ zu zeigen, müssen Sie die beiden Inklusionen $M \subseteq N$ und $N \subseteq M$ beweisen. Um z.B. $M \subseteq N$ zu beweisen, wählen Sie ein beliebiges Element $x \in M$ und zeigen Sie, dass es auch in N liegt.

- (b) Sei $(\mathcal{A}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine abzählbare Familie *abgeschlossener* Mengen, $N \in \mathbb{N}$.

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen: (i) $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_i$ ist abgeschlossen,

(ii) $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_i$ ist abgeschlossen, (iii) $\bigcup_{i=1}^N \mathcal{A}_i$ ist abgeschlossen, (iv) $\bigcap_{i=1}^N \mathcal{A}_i$ ist abgeschlossen.

Aufgabe 4

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge definiert durch

$$a_n = n\sqrt{2} - \lfloor n\sqrt{2} \rfloor,$$

wobei für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Gaußklammer $\lfloor x \rfloor$ definiert ist als die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist: $\lfloor x \rfloor = \max \{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$. Zeigen Sie, dass es für jede reelle Zahl $a \in [0, 1]$ eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ gibt, die gegen a konvergiert (dass also *jeder Punkt* in $[0, 1]$ Häufungspunkt von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist!), indem Sie die folgende Aussage beweisen:

Sei $a \in [0, 1]$, $\epsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ vorgegeben. Dann gibt es ein $\mathbf{M} \in \mathbb{N}$ mit $\mathbf{M} \geq N$, so dass $|a_{\mathbf{M}} - a| < \epsilon$ gilt.

Anleitung:

Um eine Anschauung zu bekommen, machen Sie sich deutlich, dass $a_n = (n\sqrt{2}) \bmod 1$, mit der Erweiterung der Modulo-Funktion (siehe Blatt 3, Aufgabe 2) auf reelle Zahlen, d.h. ist $\mathbb{R} \ni a = q + r$ mit $q \in \mathbb{Z}$ und $0 \leq r < 1$, dann ist $a \bmod 1 = r$. Sie können sich also vorstellen, einen Kreis der Länge 1 zu durchlaufen mit der Schrittlänge $\sqrt{2}$. Zeigen Sie zunächst, dass Sie beim Durchlaufen nie den selben Punkt zweimal erreichen, dass also $a_{n'} \neq a_{n''}$ für $n' \neq n''$ gilt, indem Sie die gegenteilige Annahme zu einem Widerspruch zur Irrationalität von $\sqrt{2}$ führen. Benutzen Sie als nächsten Schritt den Satz von Bolzano-Weierstraß um zu zeigen, dass es $n, k \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|a_{n+k} - a_n| < \epsilon$ erfüllt ist. Setzen Sie $x := a_{n+k} - a_n$ und zeigen Sie, dass $|x| > 0$. Die Folge $b_n := nx - \lfloor nx \rfloor = (nx) \bmod 1$ durchläuft den Kreis der Länge 1 mit Schrittlänge x . Verwenden Sie nun die Ungleichungen $0 < |x| < \epsilon$ um sich zu überzeugen, dass es ein $M' \in \mathbb{N}$ mit $M' \geq N$ gibt, so dass $|b_{M'} - a| < \epsilon$ gilt. Beweisen Sie schließlich noch, dass $mx - \lfloor mx \rfloor = a_{m \cdot k}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt, um das gesuchte $\mathbf{M}$ zu finden.

Abgabe: Woche ab 7.1.2013.