Übungen zur Analysis einer Variablen

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 8

Aufgabe 1

Es seien X, Y, Z Mengen und $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen.
Zeigen Sie: Für $g \circ f : X \to Z,\ x \mapsto g(f(x))$ gilt:

(a) f, g injektiv $\Rightarrow g \circ f$ injektiv.

(b) f, g surjektiv $\Rightarrow g \circ f$ surjektiv.

(c) $g \circ f$ injektiv $\Rightarrow f$ injektiv.

(d) $g \circ f$ surjektiv $\Rightarrow g$ surjektiv.

Hinweis: Um zu zeigen, dass eine Abbildung $h : M \to N$ zwischen Mengen M und N surjektiv ist, wählt man ein beliebiges Element $y \in N$ und zeigt, dass es ein $x \in M$ mit $h(x) = y$ gibt. Um zu zeigen, dass h injektiv ist, nimmt man an, dass es zwei Elemente $x_1, x_2 \in M$ mit $h(x_1) = h(x_2)$ gibt und zeigt, dass diese Annahme zu der Gleichung $x_1 = x_2$ führt.

Aufgabe 2

Beweisen Sie, dass $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ gleichmächtig sind, indem Sie eine konkrete bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ konstruiren.

Aufgabe 3

Betrachten Sie die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}$ und bestimmen Sie deren Suprema, Infima, Maxima und Minima, falls existierend:

(i) $M_1 := \{-\frac{1+2n^2}{1+n^2} \,|\, n \in \mathbb{N}_0\}$

(ii) $M_2 := \{(-1)^n - \frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$

(iii) $M_3 := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^3 - x > 0\}$

Aufgabe 4

(a) Es sei X eine unendliche Menge.

Zeigen Sie, dass es eine injektive Abbildung $f : X \to X$ gibt, die nicht surjektiv ist und dass es eine surjektive Abbildung $g : X \to X$ gibt, die nicht injektiv ist.

Hinweis: Sie können aus jeder unendlichen Menge abzählbar viele Elemente auswählen. Finden Sie zunächst Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ mit den gewünschten Eigenschaften und überlegen Sie sich in einem zweiten Schritt, wie Sie daraus Abbildungen zwischen beliebigen Mengen X mit unendlich vielen Elementen konstruieren können.

(b) Für welche endlichen Mengen M, N gilt: $f : M \to N$ ist injektiv $\Leftrightarrow$ $f : M \to N$ ist surjektiv? Beweisen Sie Ihre Aussage.

Abgabe: Woche ab 17.12.2012.