

Übungen zur Analysis einer Variablen

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 7

Aufgabe 1

Sei $r \in \mathbb{N}$ mit $r \geq 2$. Zeigen Sie, dass die folgende Reihe konvergent ist:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}.$$

Bemerkung: Diese Reihe konvergiert für alle $r \in \mathbb{R}$ mit $r > 1$. Die Definition von n^r für $r \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{N}$ folgt in der Vorlesung.

Aufgabe 2

Welche der folgenden Reihen sind divergent, welche konvergent und welche absolut konvergent? Beweisen Sie Ihre Antworten.

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{3n+1}\right)^2$

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)$

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^4+17}{3n^4+n}\right)^n$

6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^{n} k\right)$

7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n-1}$

Aufgabe 3

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ eine konvergente Reihe. Sei ferner $n_0 \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass die Ungleichungen

$$a_n, b_n > 0 \quad \text{und} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

für alle $n \geq n_0$ gelten. Zeigen Sie, dass dann auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.

Aufgabe 4

In mathematischen Beweisen muss oft mit einer logisch negierten (verneinten) Aussage gearbeitet werden, d.h. der Aussage, dass eine gegebene Aussage nicht wahr sei. Es ist dabei sehr wichtig (und manchmal gar nicht so einfach), die Negation formal und logisch korrekt zu formulieren.

Verneinen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Zu jeder Frau gibt es einen Mann, mit dem sie nicht glücklich werden kann.

(b) Es gibt keinen noch so großen Unsinn, der nicht von irgendjemand behauptet würde.

(c) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N} \; : \; |a_n - a| < \varepsilon \;\forall n > N_\varepsilon$

(d) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0,$ sodass für alle x mit $|x - a| < \delta$ gilt: $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Bemerkung: $f(x)$ bezeichnet eine Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, d.h. eine Relation, die jedem $x \in \mathbb{R}$ eine eindeutige Zahl $f(x) \in \mathbb{R}$ zuordnet. In einigen Wochen werden wir Funktionen, die das Kriterium aus Aufgabenteil (d) erfüllen, *„stetig im Punkt $a \in \mathbb{R}$"* nennen.

Abgabe: Woche ab 10.12.2012.