

Übungen zur Analysis einer Variablen

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 6

Aufgabe 1

- (a) Beweisen Sie die (strenge) Monotonie der Wurzel auf $\mathbb{R}^+$, d.h. zeigen Sie

$$0 < x < y \Rightarrow \sqrt{x} < \sqrt{y}$$

- (b) Approximieren Sie mithilfe des Algorithmus aus der Vorlesung die Zahl $\sqrt{5}$ durch einen Bruch so genau, dass der relative Fehler kleiner als $\frac{1}{100000}$ ist.

Hinweis: Verwenden Sie die Monotonie der Wurzel aus Aufgabenteil (a), um in Aufgabenteil (b) natürliche Zahlen n und $n + 1$ zu finden, sodass gilt $n < \sqrt{5} < n + 1$. Wählen Sie nun einen Wert zwischen n und $n + 1$ als Startwert a_0 des Algorithmus und berechnen Sie a_1 . Schätzen Sie den relativen Fehler $f_1 = \frac{a_1 - \sqrt{5}}{\sqrt{5}}$ ab, finden Sie mithilfe der Formel für die Fehlerfortpflanzung aus der Vorlesung ein $k \in \mathbb{N}$, sodass $f_k = \frac{a_k - \sqrt{5}}{\sqrt{5}} < 10^{-5}$ und berechnen Sie a_k als Bruch (vergessen Sie dabei nicht zu begründen, dass Sie die Formel für die Fehlerfortpflanzung auch für Abschätzungen verwenden können). Versuchen Sie möglichst ohne Taschenrechner zu arbeiten, aber tippen Sie am Ende $(a_k)^2$ in den Taschenrechner ein.

Aufgabe 2

Sei $x > 1$. Beweisen Sie die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{x^{3k} - x^k + 7k}$$

Hinweis: Finden Sie eine konvergente geometrische Reihe, die die angegebene Reihe majorisiert.

Aufgabe 3

Betrachten Sie die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

(i) Beweisen Sie durch vollständige Induktion die folgende Summenformel:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}.$$

(ii) Berechnen Sie den Grenzwert der Reihe.

Aufgabe 4

(a) Beweisen Sie das *Minorantenkriterium*:

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine divergente Reihe mit $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ eine Reihe mit $b_n \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent.

Bemerkung: Überzeugen Sie sich, dass das Minorantenkriterium auch dann gilt, wenn wir die Aussage „ $b_n \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ “ durch die Aussage „ $b_n \geq a_n$ für *fast alle* $n \in \mathbb{N}$ “ ersetzen, wobei „*fast alle*“ die abgekürzte Sprechweise für „*alle, bis auf endlich viele*“ ist.

(b) Sei $0 < q < 1$. Zeigen Sie, dass die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q^{4n} + q^{n+1}} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{100n + 3}$$

divergieren.