Übungen zur Analysis einer Variablen

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 5

Aufgabe 1

In einer Prüfung antwortet ein Student auf die Frage nach der Definition des Konvergenzbegriffs: *”Konvergenz bedeutet, dass die Glieder einer Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dem Grenzwert a immer näher kommen, ohne ihn jemals ganz zu erreichen.”*

- (a) Zeigen Sie, dass dieses Kriterium weder hinreichend noch notwendig für die Konvergenz einer Folge ist, d.h. finden Sie jeweils ein Beispiel für
 - (i) eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass die a_n dem a *”immer näher kommen”* (d.h. $|a_{n+1} - a| < |a_n - a|$ für alle $n \in \mathbb{N}$), ohne dass die Folge gegen a konvergiert.
 - (ii) eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $|a_{n+1} - a| > |a_n - a|$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ (d.h. also die Bedingung, dass die a_n dem a *”immer näher kommen”*, ist trotz Konvergenz nicht erfüllt).
- (b) Ist es für die Konvergenz einer Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen ein $a \in \mathbb{R}$ erforderlich, dass der Grenzwert a *”nie ganz erreicht”* wird?

Weisen Sie bei den von Ihnen gewählten Beispielen die gewünschten Eigenschaften auch explizit nach.

Bemerkung: Es ist aber natürlich möglich, ein hinreichendes und notwendiges Kriterium für Konvergenz anzugeben, das anschaulich ist und sich sprachlich einfach formulieren lässt, etwa: *”Konvergenz bedeutet, dass in einer beliebig kleinen Umgebung um a alle, bis auf endlich viele Folgenglieder liegen”* (warum nicht einfach *”unendlich viele”*?).

Aufgabe 2

Bestimmen Sie für die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jeweils den Grenzwert $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ und finden Sie zu dem angegebenen $\varepsilon > 0$ jeweils ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n > N_\varepsilon$ erfüllt ist.

(a) $a_n = \frac{1}{n^2 + 3n}, \quad \varepsilon = 0,001$

(b) $a_n = 2^{-n} + 3^{-n}, \quad \varepsilon = 10^{-8}$

Zur Lösung gehört natürlich der Nachweis, dass das von Ihnen gefundene N_ε tatsächlich die gewünschte Eigenschaft besitzt.

Aufgabe 3

Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchyfolgen auf einem archimedisch angeordneten (nicht notwendigerweise vollständigen) Körper $\mathbb{K}$. Zeigen Sie, dass dann auch die Folge $(a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist.

Aufgabe 4

Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reelle Folgen und $a, c \in \mathbb{R}$. Beweisen oder widerlegen Sie:

$$(a) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \right) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0.$$

$$(b) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = c \right) \Rightarrow (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist konvergent.}$$

$$(c) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \wedge b_n \neq 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 \right) \Rightarrow \neg \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \right).$$

Bemerkung: Das Symbol $\wedge$ steht für “und”, das Symbol $\neg$ steht für “nicht”.