

# Übungen zur Analysis einer Variablen

Prof. Dr. P. Pickl

## Blatt 4

### Aufgabe 1

Wir wollen Zeigen, dass alle Pferde der Welt die gleiche Farbe haben, indem wir die Aussage  $A(n) = \text{'je } n \text{ Pferde haben die gleiche Farbe'}$  mit vollständiger Induktion für alle  $n \in \mathbb{N}$  nachweisen:

- (i) Der Induktionsanfang für ein Pferd ist klar.
- (ii) Für den Induktionsschritt  $n \rightarrow n + 1$  seien  $n + 1$  Pferde gegeben. Nun nehmen wir ein Pferd weg, die verbleibenden  $n$  Pferde haben nach Induktionsvoraussetzung die gleiche Farbe. Wir fügen das Pferd wieder hinzu und entfernen ein anderes Pferd. Wieder haben die restlichen  $n$  Pferde die gleiche Farbe. Somit haben alle  $n + 1$  Pferde die gleiche Farbe.

Wo liegt der Fehler?

*Hinweis:* Betrachten Sie den ersten Induktionsschritt  $1 \rightarrow 2$  gesondert.

### Aufgabe 2

Auf der fünfelementigen Menge  $\mathbb{K} = \{0, 1, a, b, c\}$  sei die Verknüpfung  $+$  gegeben durch folgende Tabelle

| $+$ | 0 | 1 | a | b | c |
|-----|---|---|---|---|---|
| 0   | 0 | 1 | a | b | c |
| 1   | 1 | a | b | c | 0 |
| a   | a | b | c | 0 | 1 |
| b   | b | c | 0 | 1 | a |
| c   | c | 0 | 1 | a | b |

Geben Sie eine Tabelle für die Verknüpfung  $*$  an, sodass  $\mathbb{K}$  mit der Addition  $+$  und der Multiplikation  $*$  ein Körper ist. Beim Nachweis der Körpereigenschaften kann auf die Verifikation von Assoziativ- und Distributivgesetz verzichtet werden.

*Hinweis:* Laut Tabelle ist z.B.  $1 + 1 = a$ . Verwenden Sie nun das Distributivgesetz, um zu zeigen, dass  $a * a = c$  sein muss. Füllen Sie auf diese Weise nach und nach die Verknüpfungstabelle der Verknüpfung  $*$  aus.

### Aufgabe 3

Sei  $\mathbb{K}$  ein angeordneter Körper und  $a, b, x \in \mathbb{K}$  mit  $a < x < b$ . Zeigen Sie:

Es existiert ein eindeutig bestimmtes  $\lambda \in \mathbb{K}$  mit  $0_{\mathbb{K}} < \lambda < 1_{\mathbb{K}}$ , sodass  $x = (1 - \lambda)a + \lambda b$ .

*Hinweis:* Sie müssen also zwei Dinge zeigen: *Existenz* und *Eindeutigkeit*.

*Bemerkung:* Man nennt einen Ausdruck der Form  $x = (1 - \lambda)a + \lambda b$  mit  $a < x < b$  und  $0 < \lambda < 1$  *konvexe Zerlegung* von  $x$ .

### Aufgabe 4

Sei  $0 < q < 1$ . Beweisen Sie folgende Aussage mithilfe des Archimedes-Axioms:

Für alle  $\epsilon > 0$  existiert ein  $N_{\epsilon} \in \mathbb{N}$ , sodass für alle  $n > N_{\epsilon}$  gilt

$$q^n < \epsilon$$

*Hinweis:* Finden Sie ein  $x$ , sodass Sie  $q$  schreiben können als  $q = \frac{1}{1+x}$  und verwenden Sie die Bernoulli-Ungleichung, die Sie in Blatt 2, Aufgabenteil 2 a) bewiesen haben, um obige Aussage auf das Archimedes-Axiom zurückzuführen.

### Aufgabe 5

Zeigen Sie, dass jeder angeordnete Körper  $\mathbb{K}$  eine Teilmenge enthält, die sich mit  $\mathbb{N}$  identifizieren lässt, d.h. die die Peano-Axiome erfüllt.

*Bemerkung:* Ebenso lässt sich zeigen, dass jeder angeordnete Körper eine Teilmenge enthält, die sich mit der Menge der Brüche  $\mathbb{Q}$  identifizieren lässt.