

Übungen zur Analysis einer Variablen

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 3

Aufgabe 1. Sei $(\mathbb{K}, \oplus, \odot)$ ein Körper. Beweisen Sie die in der Vorlesung formulierten Rechenregeln c), d) und e):

c) $(-1) \odot x = -x;$

d) $(-x) \odot (-y) = x \odot y;$

e) $a \odot b^{-1} = c \odot d^{-1} \Leftrightarrow a \odot d = c \odot b.$

Bemerkung: Verwenden Sie nur die Körperaxiome und die bereits in der Vorlesung bewiesenen Regeln a) und b).

Aufgabe 2. Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl und $\mathbb{F}_n := \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ eine Menge. Die Verknüpfungen $\oplus$ und $\odot$ sind für $a, b \in \mathbb{F}_n$ folgendermaßen definiert:

$$a \oplus b = (a + b) \bmod n := \text{der Rest beim Teilen von } a + b \text{ durch } n,$$

$$a \odot b = (a \cdot b) \bmod n := \text{der Rest beim Teilen von } a \cdot b \text{ durch } n.$$

Zeigen Sie, dass $(\mathbb{F}_5, \oplus, \odot)$ ein Körper ist, $(\mathbb{F}_6, \oplus, \odot)$ jedoch nicht. Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist $(\mathbb{F}_n, \oplus, \odot)$ nach Ihrer Einschätzung ein Körper?

Aufgabe 3. Beweisen Sie durch vollständige Induktion den binomischen Lehrsatz, d.h. zeigen Sie, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ die folgende Formel gilt:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Hinweis: Überzeugen Sie sich zuerst, dass für alle $k, n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\} =: \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$ die folgende Gleichung gilt:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

Bemerkung: Für $k, n \in \mathbb{N}_0$ ist der *Binomialkoeffizient* $\binom{n}{k}$ gegeben durch

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{falls } k \leq n \\ 0 & \text{falls } k > n, \end{cases}$$

wobei die *Fakultät* einer Zahl $m \in \mathbb{N}_0$ wie folgt definiert ist:

$$m! = \prod_{i=1}^m i.$$

Aufgabe 4. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Schreiben Sie folgende Aussagen in normaler Sprache auf und zeigen Sie, dass es sich um wahre Aussagen handelt:

(i) $\forall a, b \in \mathbb{K} : \exists c \in \mathbb{K} : a + c = b;$

(ii) $\forall a, b \in \mathbb{K}, a \neq 0 : \exists c \in \mathbb{K} : ac = b.$