

Übungen zur Analysis einer Variablen

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 1

Aufgabe 1. Untersuchen Sie die folgenden Relationen $\sim_a$, $\sim_b$ und $\sim_c$ auf den Mengen M_a , M_b und M_c auf Reflexivität, Transitivität und Symmetrie. Wobei handelt es sich um Äquivalenzrelationen?

- (a) $a \sim_a b$ genau dann, wenn a und b beim Teilen durch 7 den selben Rest haben.
 $M_a = \mathbb{N}$.
- (b) $a \sim_b b$ genau dann, wenn $a^2 - b^2$ ganzzahliges Vielfaches von 7 ist. $M_b = \mathbb{Z}$.
- (c) $a \sim_c b$ genau dann, wenn a und b kommensurabel sind. M_c ist die Menge aller Strecken.

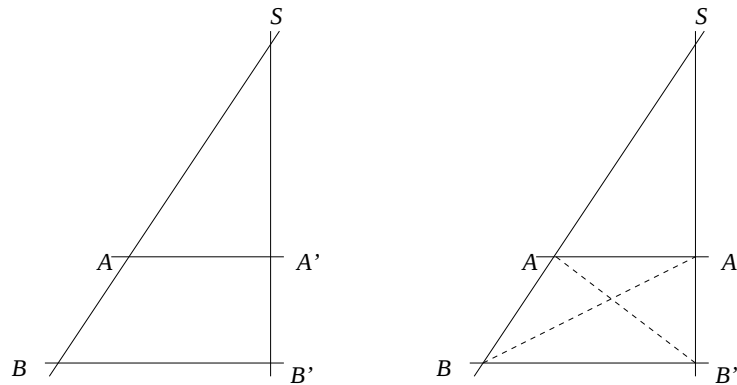
Aufgabe 2. Begründen Sie, warum sich $\mathbb{Q}^+$ (die Menge der positiven rationalen Zahlen) mit der Menge aller Streckenverhältnisse kommensurabler Strecken identifizieren lässt.

Zeigen Sie hierfür folgenden Satz: Seien α und β kommensurabel mit gemeinsamen Maß μ , d.h. $\alpha = a\mu$ und $\beta = b\mu$ für geeignete $a, b \in \mathbb{N}$. Zu zwei natürlichen Zahlen c und d findet man genau dann ein Maß ν mit $\alpha = c\nu$ und $\beta = d\nu$ wenn $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Aufgabe 3. Bestimmen Sie mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen 1512 und 366. Überprüfen Sie, ob alle Reste in der Tat auch Vielfache des Resultates sind. Berechnen Sie nun mit Hilfe einer Primfaktorenzerlegung den größten gemeinsamen Teiler um ihr Resultat zu überprüfen.

Aufgabe 4. Beweisen Sie den Strahlensatz im allgemeinen (inkommensurablen) Falle (vgl. linkes Bild)

$$SA : AB = SA' : A'B'$$



Hinweis: Führen Sie eine geschickte Flächenbetrachtung durch. Zeigen Sie zuerst: Flächen von Dreiecken gleicher Höhe verhalten sich wie die Grundlinien (vgl. rechtes Bild).

Abgabe: Montag, 29.10.2012, 12:00 Uhr.