

Übungen zur Stochastik

13.1 Die Anzahl der Druckfehler in einem Buch N_1 ist poissonverteilt mit Erwartungswert a . Die Anzahl der falsch gewählten Telefonnummern N_2 in einer Stadt ist ebenfalls poissonverteilt mit Erwartungswert b .

- (a) Geben Sie einen gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum für die beiden Vergrößerungen an.
- (b) Man gebe die gemeinsame Verteilung der beiden Größen an.
- (c) Wie lautet die Verteilung der Summe $N_1 + N_2$?

13.2 Sei N_t ein Poisson-Prozess zum Parameter λ und für $k \geq 1$ sei $\tau_k := \inf\{t \geq 0 \mid N_t \geq k\}$.

- (a) Zeigen Sie: $\{\tau_k > t\} = \bigcup_{i=0}^{k-1} \{N_t = i\}$
- (b) Folgern Sie aus (a) dass τ_k die Dichte

$$\rho(t) = \frac{\lambda^k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{-\lambda t} \quad , t \geq 0$$

besitzt. Diese Dichte heißt Gammaverteilung. (Warum?)

- (c) Zeigen Sie, dass die Dichte normiert ist, d.h. dass $\int_0^\infty \rho(t) dt = 1$ ist.
- (d) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz der Gammaverteilung.

13.3 Seien X_i mit $i \in \mathbb{N}$ unabhängige identisch verteilte Zufallsgrößen auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit Werten in $\{0, 1\}$, so dass $\mathbb{P}_{X_1}(1) = p$ sowie $\mathbb{P}_{X_1}(0) = 1 - p$ für ein $0 < p < 1$. Weiter definieren wir $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ und $T_k := \min\{n \in \mathbb{N} \mid S_n \geq k\}$ für $k \in \mathbb{N}$. Was beschreibt T_k ? Man bestimme die Verteilung von T_k und zeige, dass

$$\mathbb{P}(T_{k+l} = s + t \mid T_k = t) = \mathbb{P}(T_l = s)$$

für $k, l, s, t \in \mathbb{N}$ gilt.

13.4 Wiederholen Sie die Aufgaben der Blätter 1-12.