Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Detlef Dürr

Sommersemester 2014
Blatt 12
24.06.2014

Übungen zur Stochastik

12.1 *Zur Wärmeleitungsgleichung* In der Vorlesung haben Sie die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}p(x,t) = \frac{D}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}p(x,t)$$

kennengelernt, wobei $D = \frac{\sigma^2}{\tau}$ die Diffusionskonstante bezeichne. Man zeige, dass der Wahrscheinlichkeitskern $p(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi tD}}e^{-\frac{x^2}{2Dt}}$ die Wärmeleitungsgleichung löst.

12.2 *Brown'sche Bewegung* Sei $B(t)$ der Ort des Brown'schen Teilchens (im eindimensionalen Raum) zu Zeit t. Nach Einsteins Arbeit von 1905 ist $B(t)$ gemäß der Dichte $p(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi tD}}e^{-\frac{x^2}{2Dt}}$ verteilt.

(a) Man berechne das zweite Moment $\mathbb{E}(B(t)^2)$ von $B(t)$.

(b) Berechnen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi Ds}}e^{-\frac{x^2}{2Ds}} \frac{1}{\sqrt{2\pi D(t-s)}}e^{-\frac{(y-x)^2}{2D(t-s)}}dx$$

und interpretieren Sie das Ergebnis anhand einer geeigneten Graphik.

12.3 Man betrachte eine Teilchenbelegung des Intervalls $[0,L]$ wie folgt:
Das Intervall $[0,L]$ wird in n gleichgroße Intervalle der Länge $d > 0$ partitioniert. Jedes dieser Teilintervalle wird unabhängig von den anderen mit Wahrscheinlichkeit p von einem Teilchen besetzt.
Eine Realisierung der Besetzung geschieht mit der Familie von i.i.d. verteilten Zufallsgrößen $X_i, i = 1,\dots,n$ mit $X_1 \in \{0,1\}, \mathbb{P}_{X_1}(1) = p$.

(a) Man gebe das Bildmaß von $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ an.

(b) Nun unterteile man das Intervall $[0,L] = [0,L_1] \cup (L_1,L]$ so, dass sowohl $\frac{L_1}{d} = n_1 \in \mathbb{N}$ als auch $\frac{L-L_1}{d} = n_2 \in \mathbb{N}$ gilt.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für k_1 Teilchen in $[0,L_1]$ und k_2 Teilchen in $(L_1,L]$ im Limes $d \to 0, p \to 0, \frac{p}{d} =: \rho$.

12.4 *Poissonverteilung* Auf der Erde gibt es pro Jahr im Mittel ein Erdbeben der Stärke 8 oder mehr. Wir nehmen an, dass die Anzahl solcher Erdbeben pro Jahr der Poisson Verteilung folge. Man gehe weiter davon aus, dass die Anzahlen solcher Erdbeben in den einzelnen Jahren stochastisch unabhängig sind.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gibt es im nächsten Jahr mehr als ein Erdbeben der Stärke ≥ 8?

(b) Man bezeichne mit Y die Anzahl der Jahre im Zeitraum von 2014 bis 2113 in denen mehr als zwei Erdbeben der Stärke ≥ 8 stattfinden. Welche Verteilung hat Y? Wieviele Jahre mit mehr als zwei Erdbeben solcher Stärke kann man in diesem Zeitraum erwarten?

12.5 *Wiederholungsaufgabe* Ein Spiel bestehe aus 3 gleichzeitig geworfenen Würfeln. Wird eine 6 geworfen, erhält der Spieler einen Chip, bei zwei 6ern 2 und bei drei 6ern n Chips. Tritt keine 6 auf, verliert der Spieler einen Chip.
Wie sollte n gewählt werden, damit das Spiel fair ist?
Bemerkung: Ein Spiel ist fair, wenn der erwartete Gewinn 0 beträgt.