Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Detlef Dürr

Sommersemester 2014
Blatt 11
17.06.2014

Übungen zur Stochastik

11.1 *Über Unabhängigkeit:* Man konstruiere auf $\Omega = [-1,1]$ mit $\mathbb{P} = \frac{1}{2}\lambda$ zwei abhängige Zufallsgrößen X_1 und X_2, für die jedoch $\mathbb{E}(X_1X_2) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2)$ gilt.

11.2 *Über die Standardabweichung:* Zeigen Sie, dass das Integral

$$\int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

also die Wahrscheinlichkeit davon, dass eine $N(\mu,\sigma^2)$-verteilte Zufallsvariable im Intervall $[\mu-\sigma, \mu+\sigma]$ liegt, unabhängig von der Standardabweichung σ ist. Bestimmen Sie den Wert des Integrals.

Hinweis: Das Integral kann nur numerisch bestimmt werden. Verwenden Sie für dessen Bestimmung zum Beispiel Wolfram Alpha.

11.3 *Maximum-Likelihood-Schätzer*

(a) Seien $x_1, \ldots, x_n$ empirisch erhobene Daten einer Zufallsgröße X, von der man annimmt, dass sie normalverteilt ist mit Parametern μ und σ^2. In der Vorlesung haben Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer $\mu(n)$ für den Erwartungswert μ berechnet. Bestimmen Sie nun den Maximum-Likelihood-Schätzer $\sigma^2(n)$ für die Varianz σ^2. Warum ist dies kein sehr ehrwürdiger Schätzer? Betrachten Sie hierfür den Erwartungswert des Schätzers.

(b) Sei die Zufallsgröße nun zum Parameter $\lambda > 0$ exponentialverteilt, d.h. die Dichte von X ist gegeben durch $\rho_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0$. Man berechne den Maximum-Likelihood-Schätzer für λ.

(c) Man argumentiere warum diese Schätzmethode nur unter Annahme des Cournot'schen Prinzips sinnvoll ist.

11.4 *Binomialverteilung*

(a) Geben Sie die Anzahl der 0-1- Folgen der Länge n an, welche genau k Einsen aufweisen. Wieviele 0-1-Folgen der Länge n gibt es insgesamt?

(b) Wie hoch die Wahrscheinlichkeit bei einem n-maligen Münzwurf k-mal Kopf zu werfen? Berechnen Sie dies einerseits für den Fall einer fairen Münze, andererseits für eine unfaire Münze, welche mit Wahrscheinlichkeit $p = 0,3$ Kopf zeigt.

(c) Bestimmen Sie den Erwartungswert sowie die Varianz einer binomialverteilten Zufallsvariablen X.

11.5 In der Vorlesung haben Sie den zentralen Grenzwertsatz kennengelernt. Dabei handelt es sich um eine Grenzwertaussage. Eine Approximation ist jedoch nur wertvoll, wenn man deren Qualität kennt, d.h. wenn man weiß, wie schnell sich die Funktion dem Grenzwert annähert. Nach dem Satz von Berry Esseen gilt für zentrierte Zufallsgrößen X mit $\mathbb{E}(X^2) = \sigma^2$ und $\mathbb{E}(|X|^3) = \gamma$

$$\sup_x \left| \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \leq x \right) - \Phi(x) \right| \leq \frac{\gamma}{\sigma^3\sqrt{n}}.$$

Damit kann man z.B. Überbuchungen kontrollieren: Im Studienfach Mathematik für das höhere Lehramt gibt es 150 freie Plätze. Erfahrungsgemäß kommen nur 30 % der zugesagten Bewerber/innen. Man gibt 450 Studierenden eine Zusage. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 150 Studierende kommen? Prüfen Sie dabei auch die Qualität Ihrer Abschätzung!

Hinweis: Sei $X \in \{0, 1\}$ die Zufallsgröße, die die Entscheidung eines Zugesagten codiert, also 1 für „kommen“, 0 für „nicht kommen“. Sie nehmen an, dass alle Zugesagten unabhängig entscheiden. (Ist das vernünftig?) Wie ist X erfahrungsgemäß verteilt?