Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Detlef Dürr

Sommersemester 2014
Blatt 10
10.6.2014

Übungen zur Stochastik

10.1 *Fouriertransformation*

In der Vorlesung wurde die Fouriertransformierte/charakteristische Funktion $\Phi_X(\lambda) := \mathbb{E}(e^{i\lambda X})$, $\lambda \in \mathbb{R}$ eingeführt. Diese legt die Verteilung von X, also das Bildmaß $\mathbb{P}_X$, eindeutig fest.

(a) Beweisen Sie folgenden Satz aus der Vorlesung: Die Fouriertransformierte einer Gaußverteilung mit Varianz σ^2 und Erwartungswert $\mu = 0$ ist wieder eine Gaußfunktion mit Varianz $1/\sigma^2$.

(b) In Aufgabe 8.1 wurde gezeigt, dass die Dichte von $X+Y$ für unabhängige Vergröberungen mit Dichten $\rho(x) = e^{-x}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$ gegeben ist durch $\rho_{X+Y}(u) = ue^{-u}\mathbb{1}_{[0,\infty)}$. Die Verteilung von $X+Y$ lässt sich jedoch leichter mit Hilfe von charakteristischen Funktionen bestimmen. Verfolgen Sie diesen Ansatz um die Verteilung von $X+Y$ zu bestimmen.
Hinweis: Die Gammaverteilung mit Parametern p und b besitzt die Dichte

$$\rho(x) = \frac{b^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-bx} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$$

sowie die charakteristische Funktion

$$\Phi(\lambda) = \left(\frac{b}{b - i\lambda}\right)^p.$$

10.2 Seien X_k, $k = 1, 2, \ldots$, unabhängige Kopien von X und $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$. Weiter sei $\Phi(x) := \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y$ die Standardnormalverteilung.
Zeigen Sie, dass nach dem zentralen Grenzwertsatz

$$\mathbb{P}\big(S_n \in (a,b)\big) \approx \Phi\Big(\frac{b - n\mathbb{E}(X)}{\sqrt{n\,\mathrm{Var}(X)}}\Big) - \Phi\Big(\frac{a - n\mathbb{E}(X)}{\sqrt{n\,\mathrm{Var}(X)}}\Big)$$

für große n gilt.
Hinweis: Aus der Vorlesung ist der zentrale Grenzwertsatz in folgender Formulierung bekannt: Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. mit $0 < \sigma^2 = \mathbb{E}(X_1^2) < \infty$ und (ohne Einschränkung) $\mathbb{E}(X_1) = 0$. Dann gilt für alle $-\infty < a < b < \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i \in (a,b)\Big) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}y.$$

10.3 *Laplacetransformation*

In der Vorlesung haben Sie die Laplacetransformierte $f_X(\lambda) := \mathbb{E}[e^{\lambda X}]$ einer Verteilung X kennengelernt.

(a) Die Laplacetransformation der Verteilung von X wird auch momenterzeugende Funktion von X genannt, da $\frac{d^n}{d\lambda^n} f_X(\lambda)|_{\lambda=0} = \mathbb{E}[X^n]$. In Aufgabe 9.2.a) berechneten Sie die ersten vier Momente der Normalverteilung. Bestimmen Sie diese nochmals, jedoch mit Hilfe der Laplacetransformation.

(b) Sei $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$ und $X_1, \ldots, X_n$ iid verteilte Zufallsvariablen. Geben Sie $\mathbb{E}\left[\frac{1}{S_n}\right]$ als Funktion von f_{X_1} an, wobei f_{X_1} die Laplace-Transformierte von X_1 bezeichne. Berechnen Sie damit $\mathbb{E}\left[\frac{1}{S_n}\right]$ für den Fall, dass $X_k, k = 1, \ldots, n$ die Rademacher Funktion r_1 ist. *Hinweis:* Man verwende, dass $\int_0^\infty e^{-\lambda x} d\lambda = \frac{1}{x}$ gilt.

10.4 Beweisen Sie das Gesetz der großen Zahlen: Seien X_i, $i \in \mathbb{N}$, unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit $\mathrm{Var}(X_1) < \infty$. Dann ist für jedes $\varepsilon > 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}\Big(\Big\{\omega \,\Big|\, \Big|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i(\omega) - \mathbb{E}(X_1)\Big| > \varepsilon\Big\}\Big) \le \frac{\mathrm{Var}(X_1)}{\varepsilon^2 n}.$$