MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Detlef Dürr

Sommersemester 2014
Blatt 9
03.06.2014

Übungen zur Stochastik

9.1 *Kurz und knackig*

(a) Geben Sie die Definition des Bildmaßes $\mathbb{P}_X(A)$ an. Welche Eigenschaften muss eine Vergröberung X erfüllen, damit ein solches definiert werden kann?

(b) Konstruieren Sie ein Maß $\mathbb{P} : [0,1] \to [0,1]$, bezüglich welchem die Rademacherfunktionen r_1 und r_2 abhängig sind.

(c) X habe die Verteilungsfunktion F und Dichte ρ. Geben Sie die Dichte von $f(X)$ an, wobei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv und streng monoton wachsend ist.

(d) Seien X und Y Vergröberungen, welche vom fundamentalen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mathbb{P})$ auf die Bildräume $(\Omega', \mathcal{B}(\Omega'), \mathbb{P}_X)$ bzw. $(\Omega', \mathcal{B}(\Omega'), \mathbb{P}_Y)$ abbilden. Zeigen Sie

(i) $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A(X)) = \mathbb{P}_X(A)$

(ii) $\mathbb{E}(X + \alpha Y) = \mathbb{E}X + \alpha \mathbb{E}Y$ für $\alpha \in \Omega'$

(iii) $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}(X)$

(iv) $\mathbb{E}(f(X)g(Y)) = \mathbb{E}(f(X))\mathbb{E}(g(Y))$ für Funktionen $f, g : \Omega' \to \Omega''$

(e) Verwenden Sie die Jensensche Ungleichung um $VarX \geq 0$ für eine Vergröberung $X : \Omega \to \Omega'$ zu zeigen. Was kann über X ausgesagt werden, wenn $Var(X) = 0$ gilt?

9.2 (a) In der Vorlesung haben Sie die Normalverteilung kennengelernt. Eine Zufallsvariable X ist normalverteilt, wenn deren Dichte $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ gegeben ist. Berechnen Sie den Erwartungswert, die Varianz sowie das dritte und vierte Moment einer solchen Zufallsvariablen.

(b) Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen. Sie erinnern sich an $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$. Berechnen Sie $\mathbb{E}[\frac{S_n}{\sqrt{n}}]$, $\mathbb{E}[(\frac{S_n}{\sqrt{n}})^2]$, $\mathbb{E}[(\frac{S_n}{\sqrt{n}})^3]$ und $\mathbb{E}[(\frac{S_n}{\sqrt{n}})^4]$. Was fällt auf für große n?

9.3 Auf Blatt 7 formulierten Sie das schwache Gesetz der großen Zahlen bezüglich der empirischen Verteilung $\rho_{emp}^{(n)}(\omega, k)$ beim Galtonbrett.
Allgemein gilt: Sind $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt (i.i.d.), dann gilt für $\rho_{emp}^{(n)}(\omega, A) := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_A(X_k(\omega))$

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega : \left|\rho_{emp}^{(n)}(\omega, A) - \mathbb{P}_{X_1}(A)\right| > \epsilon\right\}\right) < \frac{Var[\rho_{emp}^{(n)}(\omega, A)]}{\epsilon^2}$$

Bestimmen Sie $Var[\rho_{emp}^{(n)}(\omega, A)]$.