Übungen zur Stochastik

8.1 Es seien X und Y unabhängige reelle Zufallsgrößen deren Dichten ρ_X und ρ_Y gegeben sind durch $\rho_X(x) = e^{-x}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$ und $\rho_Y(y) = \alpha e^{-\alpha y}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(y)$, $\alpha > 0$.
Berechnen Sie die Dichte von $X + Y$.

Hinweis: X stetig verteilt mit Dichte ρ bedeutet

$$\mathbb{P}(X < a) := \mathbb{P}(\{\omega | X(\omega) < a\}) = \mathbb{P}_X((-\infty, a)) = \int_{-\infty}^{a} \rho(x)dx\,.$$

Man berechne zunächst die Verteilungsfunktion $F_{X+Y}(z) := \mathbb{P}(X + Y \leq z)$.

8.2 Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen (Vergröberungen). Die Varianz einer Zufallsvariablen X, für die $\mathbb{E}(|X|^2) < \infty$ gilt, ist definiert als $\mathrm{Var}(X) := \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Var}(\sum_{k=1}^{n} X_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}(X_k)$$

gilt.

8.3 Sei $\Omega \coloneqq \{\omega = (\omega_k)_{k\in\mathbb{N}} \mid \omega_k \in \{0,1\}\}$ die Menge der 0-1-Folgen und $\mathcal{Z}$ die Menge der Zylindermengen auf Ω. Zur Erinnerung: Zylindermengen sind Mengen der Form $Z_{k_1,\ldots,k_n}^{(\delta_1,\ldots,\delta_n)} = \{\omega \in \Omega : \omega_{k_1} = \delta_1, \ldots,\ \omega_{k_n} = \delta_n\}$, wobei $\delta_i \in \{0,1\}$, $k_i \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$. Hier wird der Wert an n Stellen fest vorgegeben, die restlichen Stellen sind beliebig.
$\mathcal{Z}$ ist selbst keine σ-Algebra (warum?), daher betrachten wir die von $\mathcal{Z}$ erzeugte σ-Algebra $\mathcal{B}_\infty \coloneqq \sigma(\mathcal{Z})$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Mengen bezüglich $\mathcal{B}_\infty$ messbar sind, d.h. ob die Mengen in $\mathcal{B}_\infty$ enthalten sind, und beweisen Sie Ihre Behauptung.

(a) $A_1 \coloneqq \{\omega \in \Omega \mid \omega_1 \neq \omega_2\}$, d.h. die Menge der Folgen, deren erste zwei Folgenglieder verschieden sind.

(b) $A_2 \coloneqq \{\omega \in \Omega \mid \exists k \in \mathbb{N}\ \forall j \geq k\ \omega_j = 0\}$, d.h. die Menge aller Folgen, die schließlich 0 sind.

(c) $A_3 \coloneqq \{\omega \in \Omega \mid \forall k \in \mathbb{N}\ \exists j \geq k\ \omega_j = 0\}$, d.h. die Menge aller Folgen, die unendlich oft 0 enthalten.

Hinweis: Schreiben Sie diese Mengen als Vereinigungen und Durchschnitte von Zylindermengen, um Messbarkeit zu zeigen!

8.4 Man ziehe zufällig (uniform) eine Zahl aus dem Quadrat $[-1,1]^2$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass diese Zahl im Kreis $K = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ liegt.

8.5 *Randverteilungen*

(a) Seien X und Y zwei Zufallsvariablen mit der gemeinsamen Dichte $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}$. Berechnen Sie die Randverteilungen $f_X(x)$ und $f_Y(x)$.

(b) Sei $f_{X,Y}(x,y) = \mathbb{1}_{[0,1]\times[0,1]}(x,y)$ und $g_{X,Y}(x,y) = 2\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2})\times[0,\frac{1}{2})}(x,y)+2\mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1]\times[\frac{1}{2},1]}(x,y)$. Berechnen Sie die jeweiligen Randverteilungen. Was zeigt uns dieses Beispiel?