Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Detlef Dürr

Sommersemester 2014
Blatt 7
20.5.2014

Übungen zur Stochastik

7.1 *Galton-Brett und Gesetz der Großen Zahlen*
Betrachten Sie ein Galton-Brett mit $n+1$ Boxen, welche mit $0, 1, \ldots, n$ bezeichnet werden und N Kugeln, welche nacheinander das Brett durchlaufen. Eine Kugel, welche von oben ins Brett fällt, hat also n mal die Möglichkeit nach links oder nach rechts zu fallen. $X_{l,k} : \Omega \to \{0, 1\}; k = 1, \ldots, n; l = 1, \ldots, N$ bilde nach 1 ab, falls die $l$te Kugel bei der $k$ten Stufe nach rechts geht und auf 0 andernfalls. Dabei sei der Raum der Anfangsbedingung Ω gleich dem Intervall $[0, \delta]$ zu setzen. Der Endplatz der $l$ten Kugel Y_l ist gegeben durch die Vergröberung $Y_l := \sum_{k=1}^{n} X_{l,k} : \Omega \to \{0, \ldots, n\}$.

(a) Fertigen Sie eine Skizze des Galton-Bretts an.

(b) Verwenden Sie die Laplace-Wahrscheinlichkeit um die relative Häufigkeit des Ereignisses „$l$te Kugel endet in Box k“ zu bestimmen.

(c) Geben sie die empirische Verteilung $\rho^{(N)}_{emp}(\omega, k)$ für den Endplatz $k \in \{0, \ldots, n\}$ von Kugeln an. N ist die Anzahl der Kugeln und $\omega \in \Omega$ die Anfangskonfiguration.

(d) Formulieren Sie nun das (schwache) Gesetz der großen Zahlen - in Formeln und in Worten.

7.2 *Zum Begriff der Messbarkeit*
Die Parzellierungen der Vergröberungen $r_k : [0, 1) \to \mathbb{R}$ (Rademacher Funktionen) erzeugen verschiedene σ-Algebren $\mathcal{A}_k$.

(a) Man gebe die von r_1 und r_2 erzeugten σ-Algebren $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ an.

(b) Man zeige, dass r_2 nicht messbar bezüglich $\mathcal{A}_1$ ist. Ebenso zeige man, dass r_1 nicht messbar bezüglich $\mathcal{A}_2$ ist.

(c) Man zeige: Sei $f : [0, 1) \to \mathbb{R}$ messbar bezüglich $\mathcal{A}_1$. Dann ist f eine Funktion von r_1, d.h. $f(x) = F(r_1(x))$ für eine Funktion $F : \{0, 1\} \to \mathbb{R}$.

7.3 *Abgeschlossenheit der Messbarkeitseigenschaft*
Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Folge Borel-messbarer Funktionen, welche fast sicher gegen eine Funktion f konvergiert. Zeigen Sie, dass f ebenfalls Borel-messbar ist bzw., dass die Messbarkeitseigenschaft abgeschlossen unter der Folgenbildung ist.

Hinweis: Um die Messbarkeit von f zu zeigen, genügt es für alle $a \in \mathbb{R}$

$$\{x \in \mathbb{R} | f(x) < a\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

zu zeigen, wobei $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ die Borelsche Sigmaalgebra auf $\mathbb{R}$ bezeichne.

7.4 *Über die Cantormenge*

Aus dem Intervall $[0, 1]$ wird das mittlere Intervall $[1/3, 2/3)$ entfernt, und vom verbleibenden Rest wieder jeweils die mittleren Drittel, und vom verbleibenden Rest wieder die mittleren Drittel, dies ad infinitum. Am Ende bleibt wohl nicht mehr viel übrig, bis auf Randpunkte vielleicht (Schrödinger sagt: Was übrig bleibt, macht den Kohl nicht fett). Die übrig bleibende Menge wird Cantormenge C genannt.

(a) Zeigen Sie: C ist genauso mächtig wie $[0, 1]$. Hinweis: Denken Sie daran, dass man Zahlen nicht nur im Zehnersystem angeben kann.

(b) Zeigen Sie, dass C eine Lebesgue-Nullmenge ist. Was lernen Sie daraus? Dass eine Menge vom Maß 0 überabzählbar viele Elemente enthalten kann!

7.5 Konstruieren Sie eine nicht-messbare Menge auf dem Intervall $[0, 1]$.

7.6 *Ein Nachtrag zur Aufgabe 5.1*

Eine Nadel der Länge 5 wird der Länge nach zufällig auf eine Strecke der Länge 100 gelegt. Zufällig soll bedeuten, dass die Nadelmitte uniform auf der Strecke verteilt ist. Präzisieren Sie den hier verwendeten Wahrscheinlichkeitsraum, indem Sie eine Ereignismenge Ω, eine σ-Algebra $\mathcal{F}$ und ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ angeben!