Übungen zur Stochastik

6.1 *Gesetze der Großen Zahlen*

In der Vorlesung haben Sie 2 Gesetze der großen Zahlen kennen gelernt - das schwache und das starke. Beide haben Sie anhand des $n-$maligen Münzwurfes und dessen Übersetzung mittels Rademacherfunktionen besprochen. Die relative Anzahl von Köpfen („1") in n Münzwürfen ist gegeben durch die empirische Verteilung

$$\rho_{emp}^{(n)}(1,x) := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{1\}}(r_k(x)) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} r_k(x).$$

Man schreibe abkürzend $\overline{r}_n(x) := r_n(x) - \frac{1}{2}$, dann ist $\rho_{emp}^{(n)}(1,x) - \frac{1}{2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \overline{r}_k(x)$ und das schwache Gesetz der großen Zahlen besagt nun

$$\lambda(\{x : |\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \overline{r}_k(x)| > \epsilon\}) < \frac{1}{4\epsilon^2 n} \overset{n \text{ groß}}{\approx} 0, \quad \forall \epsilon > 0,$$

bzw. in Worten: Typischerweise zeigt eine Münzwurffolge der Länge n eine relative Häufigkeit von $\frac{1}{2}$ Kopf. Das starke Gesetz besagt:

$$\lambda(\{x : |\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \overline{r}_k(x)| = 0\}) = 1.$$

(a) Beweisen Sie das schwache Gesetz der großen Zahlen.

(b) Sei $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen. Die Menge $G := \cup_{l=1}^{\infty} \cap_{n=l}^{\infty} G_n$ heißt Limes Inferior der Folge von Mengen. Geben Sie in Worten an, welche Elemente G enthält. Zeigen Sie ferner folgende Gleichheit:

$$\bigcup_{l=1}^{\infty}\bigcap_{n=l}^{\infty}\{x : |\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \overline{r}_k(x)| < \epsilon\} = \{x : \lim_{n\to\infty} |\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \overline{r}_k(x)| < \epsilon\}$$

(c) Ein Beweis für das starke Gesetz wurde in der Vorlesung angerissen. Man arbeite folgenden Teilschritt aus:

$$\forall l \in \mathbb{N} \quad \exists C < \infty : \quad \int_0^1 \sum_{n=1}^{l} |\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \overline{r}_k(x)|^4 dx < C.$$

(d) Das starke Gesetz impliziert das schwache. Die andere Richtung gilt jedoch nicht. Man betrachte das Beispiel aus der Vorlesung: $\Omega = [0,1], X_n : \Omega \to \{0,1\}$ wobei

$$X_n := \mathbb{1}_{[i/2^m,(i+1)/2^m]}, \quad n = 2^m + i, \quad m \in \mathbb{N}_0, \quad i \in \{0,1,\ldots,2^m\}.$$

Man zeige, dass dieses Beispiel die schwache jedoch nicht die starke Konvergenz erfüllt und mache sich anhand dessen den Unterschied zwischen beiden Gesetzen klar.

6.2 *Wiederholungen aus Jedermann's Wahrscheinlichkeit.* Begründen Sie Ihre Antworten immer!

(a) Sie wetten, dass bei einem 10-maligen Münzwurf keinmal Kopf kommt. Wenn Sie verlieren, zahlen Sie 10 Euro, wenn Sie gewinnen, bekommen Sie 100 Euro. Würden Sie spielen?

(b) Nun kommt tatsächlich kein Kopf in den 10 Münzwürfen. Ihr Gegenspieler will noch einmal spielen. Sie sagen: „Wenn die Münze nun noch einmal 10 mal geworfen wird, dann wette ich ja de facto, dass bei 20 Würfen kein Kopf kommt. Das ist unfair." Haben Sie recht?

(c) Sie dürfen 100-mal hintereinander wetten. Ihr Einsatz bleibt immer 10 Euro, der Einsatz Ihres Gegners verdoppelt sich jedes Mal. Ist das ein verlockendes Angebot? Wenn nicht, ab wie vielen Spielen würden Sie das Angebot verlockend finden?

(d) Sie werfen in einem Würfelspiel so lange, bis eine 6 kommt. Wie sieht die Ereignismenge eines solchen Spiels aus? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „6 kommt nicht zum ersten Mal im 10. Wurf".

(e) Beim Lotto 6 aus 49 (ohne Zusatzzahl) wird jede Woche neu gezogen. Es gibt Spieler, die immer 1, 2, 3, 4, 5, 6 ankreuzen, und andere, die jedes Mal die Zahlen zufällig ankreuzen. Wer hat die bessere Chance 6 Richtige zu haben? Wer verhält sich klüger? Wie viele Wochen denken Sie spielen zu müssen, damit Sie mit einem Hauptgewinn rechnen können? Warum gibt es Leute, die tatsächlich 6 Richtige haben?