Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Detlef Dürr

Sommersemester 2014
Blatt 5
06.05.2014

Übungen zur Stochastik

5.1 Man erinnere sich an Aufgabe 4.1: Betrachtet wurde das n-malige Werfen einer Münze, wobei die Anzahl der Köpfe gezählt wurde. X_n bezeichne nun die Anzahl der Köpfe bei n Würfen. In der Aufgabe lernten Sie das $\sqrt{n}$-Gesetz am Beispiel von 100 Münzwürfen kennen. Das Gesetz besagt, dass die Schwankungsbreite der meisten, also typischen X_n von der Größenordung $\sqrt{n}$ ist, wobei die Schwankung um den Mittwelwert $\frac{n}{2}$ geschieht. Typischerweise sollte also gelten $|X_n - \frac{n}{2}| \leq \sqrt{n}$.
Zeigen Sie, dass die mit $\sqrt{n}$ skalierte Abweichung vom Mittel einer Normalverteilung folgt, also dass gilt:

$$\mathbb{P}\left(w_1 \leq \frac{X_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{n}} \leq w_2\right) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{w_1}^{w_2} e^{-2x^2} dx \tag{1}$$

Hinweise:

(a) Bringen Sie die linke Seite der Gleichung (1) auf folgende Form: $\mathbb{P}(\ldots \leq X_n \leq \ldots)$

(b) Berechnen Sie diese Wahrscheinlichkeit mittels Laplace-Wahrscheinlichkeit.

(c) Wenden Sie die bereits bekannte Näherungsformel an, welche mit Hilfe der Stirling Formel hergeleitet wurde:

$$\frac{\binom{n}{\frac{n}{2}+x\sqrt{n}}}{2^n} \approx \frac{2}{\sqrt{2\pi n}} e^{-2x^2}$$

(d) Approximieren Sie die Summe mit einem geeigneten Integral.

5.2 Eine Nadel der Länge 5 wird der Länge nach zufällig auf eine Strecke der Länge 100 gelegt. Zufällig soll bedeuten, dass die Nadelmitte uniform auf der Strecke verteilt ist.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Nadel einen gegebenen Punkt P auf der Strecke überdeckt?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Nadel an einem Ende der Strecke übersteht?

5.3 *Über Unabhängigkeit*
Man werfe eine Münze und einen Würfel. Man denkt, dass Münzwurf und Würfelwurf unabhängig sind. Es gibt verschiedene Arten, diesen Gedanken zu formalisieren:

(a) Laplacemäßig: Bei einmaligem Werfen sind die Elementarereignisse die Paare $\omega = (i, j)$, $i = 0, 1$; $j = 1, \ldots, 6$. Man zeige, dass Münzwurf und Würfelwurf unabhängige Ereignisse ergeben.

(b) Trivialisiert: Man bildet den sogenannten Produktraum und die Produktwahrscheinlichkeit aus den Einzelereignisräumen, die den Münzwurf und den Würfelwurf beschreiben. Wir betrachten dazu $\Omega_M = \{0,1\}$, $\mathrm{w}_M(i) = \frac{1}{2}$ und $\Omega_W = \{1,2,\ldots,6\}$, $\mathrm{w}_W(k) = \frac{1}{6}$ und bilden nun die Produktmenge $\Omega = \Omega_M \times \Omega_W$ und die Produktwahrscheinlichkeit $\mathrm{w}((i,j)) = \mathrm{w}_M(i)\mathrm{w}_W(j)$. Man überlege sich, dass die Ereignisse unabhängig sind.

(c) Näher an der Wahrheit: Man betrachtet eine Vergröberung des zugrunde liegenden Ereignisraumes, des Phasenraumes der Anfangsbedingungen, die die Münze wirbeln und den Würfel rollen lassen. Beispielhaft sei der Phasenraum $\Omega = [0,1)$ und das Typizitätsmaß λ, der Inhalt von Teilmengen (Intervallen) von Ω, gegeben. Der Münzwurf sei durch die Vergröberung r_1, die Rademacherfunktion gemäß dem Wörterbuch gegeben. Der Würfelwurf ist analog leicht in der Sechserdarstellung als Vergröberung R_1 darstellbar. Führen Sie das Wörterbuch für diesen Fall aus. Nun sind Münzwurf und Würfelwurf automatisch auf dem gleichen Raum definiert. Stellen Sie fest, dass diese Realisierung der Würfe nicht unabhängig ist! Wie kann man den Würfelwurf auf Ω durch geeignete Vergröberung so realisieren, dass Unabhängigkeit entsteht?

5.4 *Über ein unfaires Zählmaß*

Eine unfaire Münze ist zum Beispiel eine, die mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ Kopf zeigt. In einer Münzwurfreihe der Länge n wird also typischerweise ungefähr $\frac{n}{3}$-mal Kopf erscheinen. Mit einem seltsamen Zählmaß, das später Bernoulli-Wahrscheinlichkeit mit Trefferwahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ genannt werden wird, stellen Sie ein Model für die unfaire Münze anhand des Wörterbuchs auf, d.h. Sie realisieren den Münzwurf der unfairen Münze wie unter (c) oben.

In der Stochastik nennt man die Vergröberungen, die wir hier betrachtet haben, Zufallsvariablen oder Zufallsgrößen. Denken Sie, dass der Begriff passend ist?