

## Übungen zur Stochastik

**4.1** Zur Stirling-Formel und Typizität: Betrachten Sie 100 Münzwürfe. Berechnen Sie die relative Anzahlen von Kopf-Zahl-Folgen der Länge 100 (0-1-100-Tupel) mit genau 50, 52, 54, 56, 58, 60, 70 Köpfen. Das können Sie leicht unter <http://www.wolframalpha.com> tun. Die Eingabe `n choose m` berechnet  $\binom{n}{m}$  und `m^n` berechnet  $m^n$ . Tragen Sie die relativen Anzahlen (mal 100) in einem Koordinatensystem ab, wobei Sie den Wert 50 als zentralen Wert auf der  $x$ -Achse nehmen. Tragen Sie ebenfalls die Werte für 48, 46, ... ab.

In der Vorlesung wurde mithilfe der Stirling Formel folgende Näherung angegeben:

$$\frac{\binom{n}{n/2+\varepsilon n}}{2^n} \approx \frac{2}{\sqrt{2\pi n}} e^{-2n\varepsilon^2}$$

Setzen Sie  $\varepsilon = \delta/\sqrt{n}$  und berechnen Sie nun die entsprechenden Näherungswerte für die obigen Zahlen. Tragen Sie ebenfalls diese Werte in Ihrer Grafik ab.

Formulieren Sie Ihr Ergebnis in Form von Typizität. Dazu sei

$$\rho_n^{emp}(\omega, y) := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{\{y\}}(\pi_k(\omega)).$$

Hierin ist  $\omega$  ein 100-Tupel und  $\pi_k$  die Projektion des 100-Tupels auf die  $k$ -te Koordinate. Weiter ist  $y \in \{0, 1\}$  und  $\mathbf{1}_{\{y\}}$  die Indikatorfunktion der Menge  $\{y\}$ . Was bedeutet  $\rho_n^{emp}(\omega, y)$ ? Was können Sie mithilfe der obigen Graphik über  $\rho_n^{emp}(\omega, y)$  typischerweise aussagen?

**4.2** Eine Münze wird 10 mal geworfen. Wir arbeiten mit der Laplace Wahrscheinlichkeit. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten durch saubere Argumentation, indem Sie die Ereignisse aufschreiben. Unabhängigkeit meint hier immer die stochastische Unabhängigkeit.

- (a) Kopf im 1. Wurf ist unabhängig von Zahl im 1. Wurf.
- (b) Kopf im 9. Wurf ist unabhängig von Kopf in Würfeln 1 bis 8.
- (c) Kopf zum ersten Mal im 2. Wurf ist unabhängig von Kopf zum ersten Mal im 4. Wurf.
- (d) Kopf zum ersten Mal im 2. Wurf ist unabhängig von Kopf im 4. Wurf.
- (e)  $A$  und  $B$  seien Ereignisse und  $A \cup B = \Omega$ .  $A$  und  $B$  sind abhängig, sobald  $A$  und  $B$  echte Teilmengen von  $\Omega$  sind.

**4.3** Erinnerung an Aufgabe 5 vom Blatt 2: Die 4-Kombinationen mit Wiederholungen als Elementarereignisse sind kein gutes Modell zur Berechnung der Geburtstagskoinzidenz. Nehmen wir dennoch an, dieses Modell wäre richtig, und beschränken wir uns der Einfachheit halber auf nur 2 Leute. Unter der Bedingung, dass eine Person am Montag Geburtstag hat, wie verändert sich die Wahrscheinlichkeit, dass die andere Person ebenfalls am Montag Geburtstag hat?

**4.4** Aus dem Intervall  $[0, 1]$  wird blind eine Zahl gezogen. Bestimmen Sie die „Laplace“-Wahrscheinlichkeit dafür, dass in der Dezimalentwicklung dieser Zahl

- (a) die erste Ziffer ungerade ist,
- (b) die zweite Ziffer 4 ist,
- (c) die Summe der ersten beiden Ziffern 5 ist.

Zeichnen Sie die Ereignisse (a) und (c) ins Intervall ein.

**4.5** Unabhängigkeit von Ereignissen ist eine Familieneigenschaft: Die Ereignisse  $A_1, A_2, \dots, A_n$  heißen stochastisch unabhängig, wenn

$$w\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} w(A_i)$$

für alle Teilmengen  $I \subset \{1, \dots, n\}$ .

- (a) Konstruieren Sie 3 stochastisch unabhängige Ereignisse  $A, B$  und  $C$ .
- (b) Konstruieren Sie 3 stochastisch abhängige Ereignisse  $A, B$  und  $C$ , für die gilt, dass  $A, B$  und  $B, C$  und  $A, C$  jeweils voneinander unabhängig sind. *Hinweis:* Betrachten Sie das Werfen zweier Würfel!
- (c) Konstruieren Sie 3 Ereignisse  $A, B$  und  $C$ , für die gilt, dass  $A, B$  und  $B, C$  jeweils stochastisch unabhängig sind,  $A$  und  $C$  jedoch nicht.
- (d) Zeigen Sie, dass aus der stochastischen Unabhängigkeit von  $A$  und  $B$  folgt, dass  $A$  und  $\overline{B}$  stochastisch unabhängig sind.