Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Detlef Dürr

Sommersemester 2014
Blatt 2
15.04.2014

Übungen zur Stochastik

Hinweis: Die Tutorien am Ostermontag finden nicht statt. Dieses Blatt wird also lediglich am Donnerstag, den 24.04. sowie am Freitag, den 25.04. besprochen.

2.1 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für mindestens 4 richtige im Lotto „6 aus 49“ (ohne Beachtung der Zusatzzahl).

2.2 Wie viele Würfel muss ein Spieler auf einmal werfen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $\frac{1}{2}$ mindestens ein Würfel eine 6 zeigt? (Hinweis: Gegenereignis betrachten)

2.3 (a) Man bestimme die Anzahl der Folgen der Länge n mit Einträgen aus $\{1, \ldots, r\}$, wobei die Folge n_1-mal den Eintrag 1,..., n_r-mal die r enthält. Dabei sei $n = n_1 + \ldots + n_r$ und $n_i \in \mathbb{N}_0$ für alle $i \in \{1, \ldots, r\}$.

(b) Man berechne damit, wie viele verschiedene Wörter aus den Buchstaben von MISSISSIPPI zu bilden sind.

(c) Die Kombinatorik aus Teilaufgabe (a) ist im Multinomialsatz der Analysis wiederzufinden:

$$(x_1 + \ldots + x_r)^n = \sum_{n_1+\ldots+n_r=n} \binom{n}{n_1, \ldots, n_r} x_1^{n_1} \cdots x_r^{n_r} \tag{1}$$

Wie viele Summanden hat diese Summe bzw. wie viele Möglichkeiten gibt es, die Zahlen $n_1, ..., n_r \in \mathbb{N}_0$ so zu bestimmen, dass $n = n_1 + \ldots + n_r$ gilt.

2.4 n Herren, von denen jeder einen Hut trägt, treffen sich zu einer Stammtischrunde, doch als sie das Lokal wieder verlassen, greift jeder blind einen der Hüte. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass wenigstens einer den richtigen (nämlich seinen eigenen) Hut ergriffen hat? Was passiert für große n?

2.5 Es gibt verschiedene Möglichkeiten zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit von 6 Richtigen im Lotto „6 aus 49“- zum einen über den Ankreuzvorgang (Variationen), zum anderen über das Endergebnis des Kreuzens (Kombinationen). In beiden Fällen kann man die Variationen bzw. Kombinationen als Elementarereignisse ansehen.

Man betrachte analog die Geburtstagsaufgabe. Ausgehend von den Tupeln (Reihenfolge wird berücksichtigt) berechne man die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Gruppe von 4 Leuten mindestens 2 am gleichen Wochentag Geburtstag haben.
Nun kann man auch denken, dass die Reihenfolge, wie die Geburtstage genannt werden, völlig egal ist und dass deswegen für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit die 4-Kombination mit Wiederholung das eigentliche Elementarereignis ist.
Dann bekommt man aber ein anderes Ergebnis. Welches? Man überlege sich gute Gründe, warum dieses Ergebnis falsch ist.

2.6 Berechnen Sie

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ (Hinweis: quadrieren Sie das Integral und benutzen Sie Polarkoordinaten in der Ebene),

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x-x_0)^2}\,\mathrm{d}x$,

(c) $\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\alpha(x-x_0)^2}\,\mathrm{d}x$,

(d) $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha(x-x_0)^2}\,\mathrm{d}x$.

Zeigen Sie ferner $n! = \Gamma(n+1)$, wobei die Gammafunktion durch $\Gamma(t) := \int_0^{\infty} e^{-x} x^{t-1}\,\mathrm{d}x$ definiert ist.