Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Detlef Dürr

Sommersemester 2014
Blatt 1
8.4.2014

Übungen zur Stochastik

Falls Korrektur erwünscht, geben Sie das Blatt bitte in Ihrer Übungsgruppe ab. Bitte melden Sie sich, wenn nicht schon geschehen, zu einer Übungsgruppe an. Anmeldung, Übungsblätter und Informationen unter: `http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~bohmmech/Teaching/StochastikSoSe2014/index.php`

1.1 Seien A, B Teilmengen von Ω und $\overline{A}$, $\overline{B}$ ihre Komplemente in Ω. Weiter sei I eine Indexmenge. Man begründe graphisch und rechnerisch:

(a) $\overline{\overline{A}} = A$ und $\overline{A} = \overline{B} \Leftrightarrow A = B$.

(b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (de Morgansche Regeln) und $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(c) $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$, wobei $A \setminus B := A \cap \overline{B}$.

(d) $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i\in I}(A_i \cap B)$, sowie $\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$, wobei $\bigcup_{i\in I} A_i := \{\omega \mid \omega \in A_i$ für wenigstens ein $i\}$, $\bigcap_{i\in I} A_i := \{\omega \mid \omega \in A_i$ für alle $i\}$.

1.2 Seien $A_1, \dots, A_n \subseteq \Omega$, w ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω.

(a) Man zeige graphisch und rechnerisch: $w(A_1 \cup A_2) = w(A_1) + w(A_2) - w(A_1 \cap A_2)$.

(b) Ebenso: $w(A_1 \cup A_2 \cup A_2) = w(A_1) + w(A_2) + w(A_3) - w(A_1 \cap A_2) - w(A_1 \cap A_3) - w(A_2 \cap A_3) + w(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.

(c) Wie ist diese Formel für $w(A_1 \cup \ldots \cup A_n)$ zu verallgemeinern?

(d) 4 Herren, die jeder einen Hut tragen, treffen sich zu einer Stammtischrunde, doch als sie das Lokal wieder verlassen, greift jeder blind einen der Hüte. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass wenigstens einer den richtigen (nämlich seinen eigenen) Hut ergriffen hat? (Anleitung: Betrachten Sie das Ereignis $A_j :=$ Herr j greift Hut j.)

1.3 Eine Münze wird 10-mal geworfen.

(a) Geben Sie die Menge A an, die das Ereignis „im 3. Wurf Kopf“ beschreibt, sowie $w(A)$.

(b) Dasselbe für „zum ersten Mal Kopf im 3. Wurf“.

1.4 Eine Münze wird n-mal geworfen. Bestimmen Sie $p_n := w(\text{Zahl der Köpfe ist ungerade})$ für $n = 3$ und $n = 4$ als Zahl der günstigen durch Zahl der möglichen Fälle. Zeigen Sie außerdem, dass alle p_n gleich sind, indem Sie p_n aus p_{n-1} berechnen.