

Übungen zur Stochastik

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 9

Aufgabe 1

Wir bezeichnen die Verteilungsfunktion einer normalverteilten Zufallsvariable X mit den Parametern μ und σ ($X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$) mit $\Phi_{\sigma^2}^{\mu}$. Das heißt, es gelte

$$P(X \leq a) = \Phi_{\sigma^2}^{\mu}(a) = \int_{-\infty}^a \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx.$$

- (a) Zeigen Sie $\Phi_{\sigma^2}^{\mu}(a) = \Phi_1^0\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$.
- (b) Es sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsgrößen mit endlichem Erwartungswert μ und endlicher Varianz σ^2 . Zeigen Sie mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes folgende Näherungen (für große n)

$$P(a \leq \sum_{j=1}^n X_j \leq b) \approx \Phi_{n\sigma^2}^{n\mu}(b) - \Phi_{n\sigma^2}^{n\mu}(a),$$
$$P(a \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j \leq b) \approx \Phi_{\frac{1}{n}\sigma^2}^{\mu}(b) - \Phi_{\frac{1}{n}\sigma^2}^{\mu}(a).$$

Anmerkung: Aufgabenteil (a) zeigt, dass die Werte beliebiger Normalverteilungen durch ein Tafelwerk mit den Werten der Standardnormalverteilung bestimmt werden können.

Aufgabe 2

Üblicherweise folgert man für große n aus dem zentralen Grenzwertsatz die Näherung $P(a \leq S_n \leq b) \approx \Phi_{n\sigma^2}^{n\mu}(b) - \Phi_{n\sigma^2}^{n\mu}(a)$ mit $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$. Dabei wird jedoch das Eintreten des Randwertes $P(S_n = a)$ vernachlässigt. Eine bessere Näherung erhält man durch die sogenannte Stetigkeitskorrektur

$$P(a \leq S_n \leq b) = \Phi_{n\sigma^2}^{n\mu}(b + 1/2) - \Phi_{n\sigma^2}^{n\mu}(a - 1/2),$$
$$P(a < S_n < b) = \Phi_{n\sigma^2}^{n\mu}(b - 1/2) - \Phi_{n\sigma^2}^{n\mu}(a + 1/2).$$

Man werfe 16 mal eine faire Münze. Mit welcher Wahrscheinlichkeit beobachtet man, dass die Münze entweder 7 oder 8 mal auf „Kopf“ fällt? Man bestimme diese Wahrscheinlichkeit einmal

- (a) exakt unter Verwendung der Binomialverteilung, einmal
- (b) approximativ mithilfe des Zentralen Grenzwertsatzes und schließlich
- (c) ebenfalls approximativ mithilfe des Zentralen Grenzwertsatzes, diesmal aber mit Stetigkeitskorrektur.

Aufgabe 3

$X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ und $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ seien zwei unabhängige normalverteilte Zufallsvariablen mit den Parametern μ_1 und σ_1 bzw. μ_2 und σ_2 . Zeigen Sie, dass die Zufallsvariable $Y = X_1 + X_2$ normalverteilt ist mit den Parametern $\mu_1 + \mu_2$ und $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$.

Aufgabe 4

Es wird Ihnen folgendes Spiel vorgeschlagen:

Eine (unfaire) Münze zeigt mit der Wahrscheinlichkeit p „Zahl“. Ihr Einsatz soll M Euro betragen. Bei „Zahl“ verlieren Sie einen Euro und bei „Kopf“ gewinnen Sie einen Euro. Die Münze wird solange geworfen, bis Ihr Einsatz entweder verbraucht ist oder bis Sie den maximalen Gewinn N erreicht haben.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die beiden möglichen Spielausgänge.

Hinweis: Leiten Sie sich zuerst die Rekursionsformel analog zur Vorlesung für die Wahrscheinlichkeit für den Verlust von k Euro her.

Abgabe: Montag, 10.7.2017 , 14 Uhr.