MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

SoSe 2017

Übungen zur Stochastik

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 8

Aufgabe 1

Gegeben sei eine Folge von Zufallsgrößen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen $a \in \mathbb{R}$ in Verteilung konvergiert ($X_n \xrightarrow{inVert.} X \equiv a$). Zeigen Sie, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dann auch stochastisch gegen a konvergiert ($X_n \xrightarrow{stoch.} X \equiv a$).

Aufgabe 2

Starkes Gesetz der großen Zahlen: Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von diskreten und unabhängigen Zufallsgrößen. Weiterhin sei $E(X_k^6)$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ endlich und die X_k seien gleichverteilt mit $E(X_k) = 0$. Der Mittelwert der ersten n Folgenglieder sei gegeben durch $M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$.

(a) Beweisen Sie

$$E\left(|X_k|^i\right) \leq E\left(X_k^6\right) + 1 \quad \forall i \in \{1,2,3,4,5\}. \tag{1}$$

(b) Zeigen Sie, dass es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$P\left(|M_k| > \frac{1}{l}\right) < \frac{c \cdot l^6}{k^3}\left[E(X_1^6) + E(X_1^6)^2 + 1\right]. \tag{2}$$

(c) Folgern Sie mit Hilfe der Sätze aus der Vorlesung, dass $P\left(\lim_{n\to\infty} M_n = 0\right) = 1$.

Aufgabe 3

Sei $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine unabhängige Folge von fairen Münzwürfen, d.h. X_k nimmt für jedes $k \in \mathbb{N}$ jeweils mit Wahrscheinlichkeit 1/2 die Werte 0 oder 1 an.

Finden Sie mit Hilfe der Abschätzung beim Beweis des schwachen Gesetzes der großen Zahlen (Vorlesung) eine obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit, dass für $n = 1000$ Würfe mehr als 550-mal Kopf erscheint. Suchen Sie dann eine Schranke mit Hilfe des Resultats von Aufgabe 2(b).

Abgabe: Montag, 03.07.2017 , 14 Uhr.