Lösungsskizze zu Blatt 7

Aufgabe 1

(a)

$$A_n := [0,n] \quad \text{und} \quad B_m := [0,b_m] \quad \text{mit } b_m := \begin{cases} 1 & \text{für } m \text{ gerade} \\ 2 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (m,n \in \mathbb{N})$$

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{l=n}^{\infty} A_l\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty}[0,\infty) = [0,\infty)$$

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{l=n}^{\infty} A_l\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty}[0,n] = [0,\infty)$$

In diesem Fall stimmen also lim sup und lim inf überein.

$$\limsup_{m\to\infty} B_m = \bigcap_{m=1}^{\infty}\left(\bigcup_{l=m}^{\infty} B_l\right) = \bigcap_{m=1}^{\infty}[0,2] = [0,2]$$

$$\liminf_{m\to\infty} B_m = \bigcup_{m=1}^{\infty}\left(\bigcap_{l=m}^{\infty} B_l\right) = \bigcup_{m=1}^{\infty}[0,1] = [0,1]$$

Hier stimmen die Limiten nicht überein. Es ist nämlich $\bigcup\limits_{l\geq m} B_m = [0,2]$ unabhängig von m, da die Vereinigung von je zwei aufeinander folgenden Mengen in B_m das Intervall $[0,2]$ ist. Der Durchschnitt zweier Mengen ist dagegen jeweils $[0,1]$, weshalb $\bigcap\limits_{l\geq m} = [0,1]$ ist.

(b) Sei $X \in \liminf\limits_{n\to\infty} C_n$. Gemäß Definition von lim inf liegt X auch in $\bigcap\limits_{l\geq m} C_l$ für mindestens ein $m \in \mathbb{N}$.
Sei $k = \max\{m,n\}$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $X \in C_k$ und wegen n beliebig folgt $X \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} C_k\right) = \limsup\limits_{n\to\infty} C_n$.

Aufgabe 2:

(a): $$\int_{-\infty}^{\infty} \varrho_\lambda(x)\,dx = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \lambda \cdot \frac{1}{-\lambda} e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} = -1\left(0 - e^{-\lambda \cdot 0}\right)$$

$$= -1 \cdot (-1) = \underline{\underline{1}}$$

$\Rightarrow$ ϱ_λ ist eine Wahrscheinlichkeitsdichte, da offensichtlich messbar und nicht-negativ.

(b):

1. Fall: Sei $t > 0$: $$V_X(t) = P\left(X^{-1}(]-\infty, t])\right) = \int_{-\infty}^{t} \varrho_\lambda(x)\,dx$$

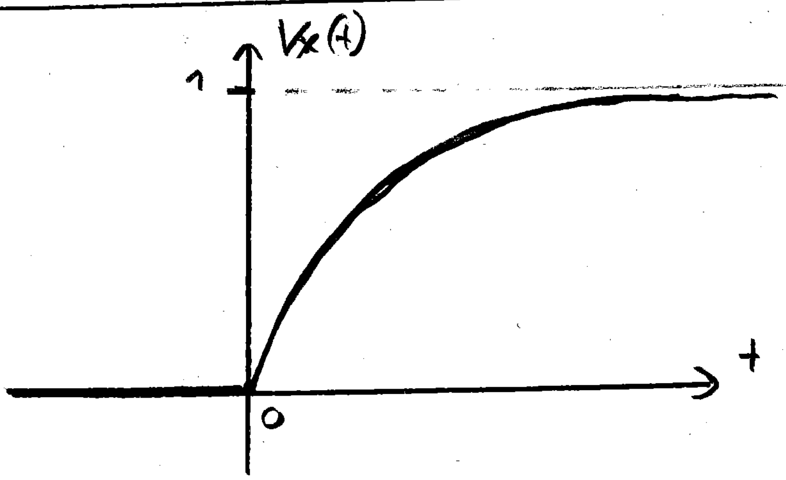
$$= \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \lambda \cdot \frac{(-1)}{\lambda} e^{-\lambda x}\Big|_0^t$$

$$= -1 \cdot \left(e^{-\lambda \cdot t} - e^{-\lambda \cdot 0}\right) = \underline{\underline{1 - e^{-\lambda \cdot t}}}$$

2. Fall: Sei $t \leq 0$: $$\underline{\underline{V_X(t)}} = P\left(X^{-1}(]-\infty, t])\right) = \int_{-\infty}^{t} \varrho_\lambda(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{t} 0 \cdot dx = \underline{\underline{0}}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{für } t > 0. \end{cases}}$$



Aufgabe 2:

(c): $$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x\,\varrho_\lambda(x)\,dx = \int_0^\infty x\,\lambda\, e^{-\lambda x} = \lambda \int_0^\infty x\, e^{-\lambda x}\,dx$$

$$\overset{P.I.}{=} \lambda\left(\frac{(-1)}{\lambda} e^{-\lambda x} x\Big|_0^\infty - \int_0^\infty 1\cdot\frac{(-1)}{\lambda} e^{-\lambda x}\right)$$

$$= \lambda\cdot 0 - \lambda\cdot\frac{(-1)^2}{\lambda^2} e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty$$

$$= 0 - \frac{1}{\lambda}(0-1) = \underline{\underline{\frac{1}{\lambda}}}.$$

$$\underline{\underline{Var(X)}} = \int_{\mathbb{R}} \left(x-\frac{1}{\lambda}\right)^2 \varrho_\lambda(x)\,dx = \int_0^\infty \left(x-\frac{1}{\lambda}\right)^2 \lambda\, e^{-\lambda x}$$

$$= \lambda \underbrace{\int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x}}_{(*)} - 2\int_0^\infty x\, e^{-\lambda x}\,dx + \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx$$

$$(*) = \int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x} = \frac{(-1)}{\lambda} x^2 e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty 2x\,\frac{(-1)}{\lambda} e^{-\lambda x}$$

$$= 0 + \frac{2}{\lambda}\int_0^\infty x\, e^{-\lambda x}\,dx$$

$$= 2\int_0^\infty x\, e^{-\lambda x} - 2\int_0^\infty x\, e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx$$

$$= \frac{1}{\lambda}\cdot\frac{(-1)}{\lambda} e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty = \frac{(-1)}{\lambda^2}(0-1) = \underline{\underline{\frac{1}{\lambda^2}}}$$

Aufgabe 3: $\mathbb{P}(Z \geq n) = \cancel{\mathbb{P}(X+Y \geq n)}$

$$= \mathbb{P}(\min(X,Y) \geq n)$$

$$= \mathbb{P}(X \geq n \wedge Y \geq n) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{unabhängig}}}{=} \mathbb{P}(X \geq n) \cdot \mathbb{P}(Y \geq n)$$

$$= \left[\sum_{j=n}^{\infty} p(1-p)^j\right]^2 = \left[\sum_{j=n}^{\infty} (1-q)\, q^j\right]^2 =$$

$$= \left[q^n - q^{n+1} + q^{n+1} - q^{n+2} + \dots\right]^2 = q^{2n}$$

$$\mathbb{P}(Z = n) = \mathbb{P}(Z \geq n) - \mathbb{P}(Z \geq n+1) =$$

$$= q^{2n} - q^{2n+2} = q^{2n}(1-q^2) =$$

$$= (1-p)^{2n} \cdot p(2-p)$$

Aufgabe 4: Sei $I \subset \mathbb{N}$ so, dass

$$\mathbb{P}(\{\omega_i\}) > 0 \iff i \in I$$
$$\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = 0 \iff i \notin I$$

Sei nun $i \in I$ d.h. $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) > 0$

Wegen stoch. Konvergenz gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$$

Insbesondere:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) < \mathbb{P}(\{\omega_i\}) \quad \forall n \geq m$$

$\Rightarrow \quad \omega_i \notin \{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}$ also:

$$|X_n(\omega_i) - X(\omega_i)| < \varepsilon$$

Zusammenfassend gilt: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists m \in \mathbb{N} : |X_n(\omega_i) - X(\omega_i)| < \varepsilon \quad \forall n \geq m$

$$:\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} X_n(\omega_i) = X(\omega_i) \quad \forall i \in I$$

$\Rightarrow$ (*) $\{\omega_i : i \in I\} \subset \{\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}$

Außerdem: $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i \notin I} \{\omega_i\}\right) = \sum_{i \notin I} \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = 0$

Kolmogorov, hier geht Abzählbarkeit von Ω ein

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} X_n = X\right) = \mathbb{P}\left(\{\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}\right) \overset{(*)}{\geq}$$
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in I} \{\omega_i\}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i \notin I} \{\omega_i\}\right) = 1 - 0 = 1$$

$\square$