

Übungen zur Stochastik

Prof. Dr. P. Pickl
Blatt 7

Aufgabe 1

(a) Betrachten Sie die Mengenfolgen

$$A_n := [0, n] \quad \text{und} \quad B_m := [0, b_m] \quad \text{mit} \quad b_m := \begin{cases} 1 & \text{für } m \text{ gerade} \\ 2 & \text{sonst} \end{cases} \quad (m, n \in \mathbb{N}).$$

Berechnen Sie $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} A_k$, $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq n} A_k$, $\limsup_{m \rightarrow \infty} B_m$ und $\liminf_{m \rightarrow \infty} B_m$.

(b) Zeigen Sie, dass für beliebige Mengenfolgen C_n die Inklusion $\liminf_{n \rightarrow \infty} C_n \subseteq \limsup_{n \rightarrow \infty} C_n$ gilt.

Aufgabe 2

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Zufallsgröße heißt exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$, falls X eine Dichte der Form

$$\rho_\lambda(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \end{cases} \quad (1)$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}^+$ besitzt.

- (a) Zeigen Sie, dass ρ_λ eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.
- (b) Skizzieren Sie die Verteilungsfunktion $V_X(t)$.
- (c) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X .

Bemerkung: Die Exponentialverteilung spielt eine zentrale Rolle bei der Beschreibung von Lebenszeiten eines Bauteiles oder eines Atoms.

Aufgabe 3

Eine diskrete Zufallsvariable X ist geometrisch verteilt genau dann, wenn

$$\mathbb{P}(X = n) = p(1 - p)^n \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0 .$$

X und Y seien stochastisch unabhängige, mit Parameter p geometrisch verteilte Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum Ω . Finden Sie die Verteilung der Zufallsvariable $Z = \min(X, Y)$ (d.h. $Z(\omega) = \min(X(\omega), Y(\omega))$ für alle $\omega \in \Omega$).

Hinweis: Statt $\mathbb{P}(Z = n)$ direkt zu berechnen, empfiehlt es sich zunächst die Verteilung $\mathbb{P}(Z \geq n)$ zu betrachten.

Aufgabe 4

Sei Ω abzählbar (d.h. endlich oder abzählbar unendlich) und $X, X_1, X_2, \dots$ seien darauf definierte Zufallsvariablen. Zeigen Sie (ohne weitere Annahmen), dass in diesem Fall aus der stochastischen Konvergenz der Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen X deren fast sichere Konvergenz gegen X folgt (d.h., dass in diesem Fall stochastische Konvergenz und fast sichere Konvergenz äquivalent sind).

Hinweis: Argumentieren Sie zunächst, dass für alle $\omega_i \in \Omega$ mit $\mathbb{P}(\omega_i) > 0$ gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega_i) = X(\omega_i)$. Zeigen Sie dann, dass die Menge aller anderen ω_i das Wahrscheinlichkeitsmaß null hat.

Abgabe: Montag, 26.6.2017, 14 Uhr.