MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

SoSe 2017

Übungen zur Stochastik

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 6

Aufgabe 1

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein gegebenes Ereignis in einem gegebenen Zeitintervall genau $k \in \mathbb{N}_0$ mal eintritt, sei gegeben durch die *Poisson-Verteilung* zum Parameter $\lambda > 0$: $p(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

(a) Zeigen Sie, dass die Poisson-Verteilung auf 1 normiert ist und berechnen Sie Erwartungswert und Varianz.

(b) Zeigen Sie, dass sich die Poisson-Verteilung aus der Binomialverteilung $b_{n,p}(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ ergibt, wenn die Grenzübergänge $n \to \infty$ und $p \to 0$ derart ausgeführt werden, dass der Erwartungswert $np := \lambda$ konstant bleibt. Setzen Sie dafür $p = \frac{\lambda}{n}$ und betrachten Sie die Binomialverteilung im Limes $n \to \infty$.

Bemerkung: In der Poisson-Verteilung geht die Symmetrie zwischen Ereignis (mit Wahrscheinlichkeit p) und Gegenereignis (mit Wahrscheinlichkeit $1-p$) aus der Binomialverteilung verloren: So können wir z.B. bei einer Münzwurfreihe nach der Wahrscheinlichkeit für k mal *Kopf* oder l mal *nicht Kopf* ($\equiv$ *Zahl*) fragen (Binomialverteilung). Dagegen können wir zwar nach der Wahrscheinlichkeit fragen, dass ein Blitz in einer gegebenen Region in einer gegebenen Zeitspanne k mal einschlägt (Poisson-Verteilung), aber es ist unsinnig zu fragen, wie wahrscheinlich ein Blitz in dieser Zeitspanne l mal nicht einschlägt.

Aufgabe 2

Es sei $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ die Borelsche $\sigma-$Algebra über $\mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ eine integrierbare Funktion mit der Eigenschaft

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1.$$

Zeigen Sie, dass durch

$$P(A) = \int_A f(x)dx$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß $P : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definiert wird.

Aufgabe 3

Es seien X_1 und X_2 unabhängige Zufallsvariablen mit stetigen Dichten ρ_1 und ρ_2.

(a) Zeigen Sie, dass die Dichte von $Y = X_1 + X_2$ gegeben ist durch die Faltung der beiden ursprünglichen Dichten: $\rho(x) = (\rho_1 * \rho_2)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_1(x-y)\rho_2(y)\,dy$.

Hinweis: Begründen Sie, dass sich die Verteilungsfunktion schreiben lässt als

$$F(x) = P(Y = X_1 + X_2 \leq x) = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{\{\,y+z\leq x\}}(y,z)\,\rho_1(y)\,\rho_2(z)\,dy\,dz\ ,$$

wobei die Indikatorfunktion $\chi_A(x)$ auf dem letzten Blatt definiert wurde (dass nun das Argument zweidimensional ist, macht keinen Unterschied).

(b) Berechnen Sie die Dichte für den Fall $\rho_1(x) = e^{-x}$ und $\rho_2(x) = \alpha e^{-\alpha x}$, wobei $\alpha > 0$ und ρ_1 und ρ_2 auf $[0,\infty)$ definiert sind.

Aufgabe 4

Wir betrachten eine reelle Zufallsvariable X auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und deren Verteilungsfunktion

$$V_X : \mathbb{R} \to [0,1], \quad t \mapsto V_X(t) = P(X^{-1}(]-\infty, t])).$$

Der linksseitige Grenzwert im Punkt t sei gegeben durch $V_X(t-0) := \lim_{s\to t, s<t} V_X(s)$. Falls $h := V_X(t) - V_X(t-0) > 0$, so sagt man, dass F in t einen Sprung der Höhe h besitzt.

(a) Zeigen Sie, dass V_X genau dann in t einen Sprung der Höhe h besitzt, wenn $h = P(X = \{t\})$.

(b) Zeigen Sie, dass V_X höchstens abzählbar viele Sprungstellen hat.

Abgabe: Montag, 19.6.2017 , 14 Uhr.