MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

SoSe 2017

Übungen zur Stochastik

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 5

Aufgabe 1

In einer Urne befinden sich vier Kugeln, von denen jeweils zwei mit „0“ und „1“ beschriftet sind. Man zieht nacheinander zwei Kugeln ohne die Erste wieder zurückzulegen. Die Zufallsvariablen X und Y beschreiben den Wert der ersten und zweiten Kugel. Zeichnen Sie die Verteilungsfunktion von $X + Y$.

Aufgabe 2

(a) Es seien $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{B})$ zwei Meßräume (d.h. $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sind σ-Algebren auf X und Y) und $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ mit $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{B}$. Zeigen Sie, dass

  (i) $f : X \to Y$ ist $\mathcal{A} - \mathcal{B}-$meßbar

  (ii) Für jedes $B \in \mathcal{E}$ ist $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$

  äquivalent sind.

(b) Zeigen Sie, dass jede stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{B}(\mathbb{R}) - \mathcal{B}(\mathbb{R})-$meßbar ist.

Hinweis: In Aufgabenteil (a) ist es hilfreich zuerst zu zeigen, dass $\{V \subseteq Y : f^{-1}(V) \in \mathcal{A}\}$ eine σ-Algebra ist.

Aufgabe 3

Das **Betrand'sche Paradoxon**: In einem Kreis mit Radius $r > 0$ werde „rein zufällig“ eine Sehne gezogen. Die Frage mit welcher Wahrscheinlichkeit sie länger als die Seiten eines einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks ist, kann nicht eindeutig beantwortet werden. In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass die Antwort von dem Verfahren abhängt, mit dem die Sehne gezogen wird.

(a) Die Sehne ist durch ihren Mittelpunkt eindeutig bestimmt (solange dieser nicht gerade der Kreismittelpunkt ist, was vernachlässigt werden kann). Man kann deshalb das „zufällige“ Ziehen einer Sehne so interpretieren, dass ein „zufälliger“ Punkt im Kreis als Mittelpunkt der Sehne ausgewählt und dessen zugehörige Sehne konstruiert wird. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine auf diese Weise „rein zufällig“ gezogene Sehne länger ist als die Seiten eines einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks.

(b) „Zufällig“ kann auch bedeuten, dass die beiden Schnittpunkte der Sehne mit dem Kreis zufällig gewählt werden. Da nur die relative Lage der Schnittpunkte ausschlaggebend für die Länge der Sehne ist, liefert aufgrund der Rotationssymmetrie des Problems folgende Vorgehensweise die gleiche Längenverteilung. Fixieren Sie einen Punkt auf dem Kreis. Wählen Sie anschließend „zufällig“ einen zweiten Punkt auf dem Kreis und zeichnen Sie die Sehne durch beide Punkte.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine auf diese Weise „rein zufällig“ gezogene Sehne länger ist als die Seiten des einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks.

(c) Das Ziehen einer Sehne soll nun gemäß Teilaufgabe (a) geschehen. Die Zufallsvariable X sei gegeben durch die Sehnenlänge. Skizzieren Sie die Verteilungsfunktion von X.

Aufgabe 4

Für den Zufallsraum $\Omega = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ist die Laplace-Wahrscheinlichkeit dafür, aus Ω blind eine Zahl zu ziehen, die in einer messbaren Teilmenge $A \subseteq \Omega$ liegt, natürlicherweise gegeben durch das normierte Lebesguemaß: $P(A) = \frac{\lambda(A)}{b-a}$.

(a) Aus $\Omega = [0, 1]$ wird nun blind eine Zahl gezogen. Bestimmen Sie die Laplace-Wahrscheinlichkeit dafür, dass in der Dezimalentwicklung dieser Zahl

   (i) die erste Ziffer ungerade ist,
   (ii) die zweite Ziffer 4 ist,
   (iii) die Summe der ersten beiden Ziffern 5 ist.

   Zeichnen Sie die Ereignisse (i) und (iii) ins Intervall ein.

(b) Es sei $\Omega = [-1, 1]$ und

$$\chi_A : \Omega \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   die *Indikatorfunktion* einer Teilmenge $A \subseteq \Omega$. Wir definieren nun auf Ω die beiden Zufallsvariablen

$$X(x) := \chi_{[0,\frac{1}{2})}(x) - \chi_{[\frac{1}{2},1]}(x) \quad \text{und} \quad Y(x) := -\chi_{[-1,0)}(x) + \chi_{[0,1]}(x)$$

   Zeigen Sie, dass X und Y stochastisch abhängig sind.

Abgabe: Mittwoch, 7.6.2017 , 11 Uhr.