

Übungen zur Stochastik

Prof. Dr. P. Pickl
Blatt 4

Aufgabe 1

Wir betrachten einen n -fachen Münzwurf. Die Zufallsgröße X gebe an, wie oft die Münze auf „Kopf“ gefallen ist. Finden Sie Werte n , sodass $P(|X - \frac{n}{2}| \geq 0.01n) \leq 0.1$.

Aufgabe 2

Wir betrachten die Grundmenge $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$ und die beiden Erzeugendensysteme $E_1 = \{\{0, 1\}, \{1, 2\}, \{1\}\}$ und $E_2 = \{\{0, 1\}, \{1, 2\}\}$.

- (a) Es sei $\mathcal{A}_1^* = \sigma(E_1)$ die von E_1 erzeugte σ -Algebra und $P_1 : \mathcal{A}_1^* \mapsto \mathbb{R}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß mit

$$P_1(\{0, 1\}) = P_1(\{1, 2\}) = \frac{2}{3} \quad \text{und} \quad P_1(\{1\}) = \frac{1}{3}. \quad (1)$$

Zeigen Sie, dass $P_1 : \mathcal{A}_1^* \mapsto \mathbb{R}$ durch (1) eindeutig bestimmt ist.

- (b) Es sei $\mathcal{A}_2^*$ die von E_2 erzeugte σ -Algebra und $P_2 : \mathcal{A}_2^* \mapsto \mathbb{R}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß mit

$$P_2(\{0, 1\}) = P_2(\{1, 2\}) = \frac{2}{3}. \quad (2)$$

Zeigen Sie, dass $P_2 : \mathcal{A}_2^* \mapsto \mathbb{R}$ durch (2) nicht eindeutig bestimmt wird.

Bemerkung: Diese Aufgabe ist ein Beispiel des allgemeineren (in der Vorlesung nicht behandelten) Satzes:

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, wobei $\mathcal{F}$ die von $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ erzeugte σ -Algebra ist. Ist $\mathcal{G}$ $\cap$ -stabil in dem Sinn, dass mit $A, B \in \mathcal{G}$ auch $A \cap B \in \mathcal{G}$, so ist P bereits durch seine Einschränkung $P|_{\mathcal{G}}$ auf $\mathcal{G}$ eindeutig bestimmt.

Lösen Sie die Aufgabe bitte direkt ohne Hilfe dieses Satzes.

Aufgabe 3

Es sei Ω eine überabzählbare Menge und $\mathcal{F}_1$ beziehungsweise $\mathcal{F}_2$ jeweils eine Menge von Teilmengen von Ω mit folgender Definitionen:

$\Omega \supseteq A \in \mathcal{F}_1$ genau dann, wenn A oder A^c endlich ist.

$\Omega \supseteq A \in \mathcal{F}_2$ genau dann, wenn A oder A^c abzählbar (endlich oder abzählbar unendlich) ist.

Sind $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ σ -Algebren. Beweisen oder widerlegen Sie.

Aufgabe 4

Es sei Ω eine endliche Menge und $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sowie $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ reelle Zufallsgrößen. Füllen Sie die Lücken ___ mit den Symbolen $\{\leq, \geq, =\}$ und begründen Sie ihre Antwort:

- (a) $\mathbb{E}(X) \text{ ___ } \sqrt{\mathbb{E}(X^2)}$,
- (b) $\mathbb{E}(\sin^2(X)) + \mathbb{E}(\cos^2(X)) \text{ ___ } 1$,
- (c) $P(|X| > c) \text{ ___ } \frac{\mathbb{E}(|X|^3)}{c^3}$ mit $c \in \mathbb{R}^+$,
- (d) $\mathbb{E}(XY) \text{ ___ } \sqrt{\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)}$,
- (e) $P(X + Y > 10) \text{ ___ } P(X > 5 \text{ oder } Y > 5)$.

Abgabe: Montag, 29.5.2017 , 14 Uhr.