MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN SoSe 2017

Übungen zur Stochastik

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 3

Aufgabe 1

Auf dem Laplace-Raum $\Omega = \{\omega = (i,j) \mid i,j \in \{1,2,3\}\}$ (z.B. zwei-maliges Werfen eines Würfels mit nur drei Seiten) betrachte man folgende zwei Zufallsvariablen:

$$X : \Omega \longrightarrow \{0,1\} \text{ mit } \begin{cases} X(i,j) = 0, & \text{falls } |i-j| \geq 1 \\ X(i,j) = 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

sowie

$$Y : \Omega \longrightarrow \{0,1\} \text{ mit } \begin{cases} Y(i,j) = 0, & \text{falls } j = 3 \\ Y(i,j) = 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Zufallsvariablen X und Y stochastisch unabhängig sind.

Aufgabe 2

Es werden zwei faire Würfel (ein roter und ein grüner) geworfen und ihre Augenzahlen mit den Zufallsvariablen X und Y beschrieben.

(a) Berechnen Sie die Kovarianz von $X+Y$ und $X-Y$.

(b) Sind $X+Y$ und $X-Y$ unabhängig? Beweisen oder widerlegen Sie.

Aufgabe 3

Es sei Ω eine endliche Menge und $P : \mathfrak{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

(a) Gibt es Zufallsgrößen $X : \Omega \to \mathbb{R}$ und $Y : \Omega \to \mathbb{R}$, sodass $E(X) > 100E(Y)$ aber $P(Y - X \geq 0) \geq 0,99$?

(b) Zeigen Sie, dass es keine Zufallsgröße $X : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $P(|X| \geq 1) > \frac{1}{2}$ und $\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{2}$ gibt.

Aufgabe 4

(a) Es sei Ω eine endliche Menge, $P : \mathfrak{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable. Zeigen Sie

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{a \in X(\Omega)} f(a) P(X = a).$$

(b) Wir betrachten den Laplace-Raum $\Omega = \{a, b, c\}$. Finden Sie zwei Zufallsvariablen, die unkorreliert aber abhängig sind.

Abgabe: Montag, 22.5.2017 , 14 Uhr.