

Übungen zur Stochastik

Prof. Dr. P. Pickl
Blatt 1

Aufgabe 1

Es sei Ω eine endliche Menge, $P : \mathfrak{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß und $A, B \in \mathfrak{P}(\Omega)$. Zeigen Sie:

- (a) $P(\emptyset) = 0$,
- (b) $A \subseteq B$ impliziert $P(A) \leq P(B)$,
- (c) Aus $P(A) \leq P(B)$ folgt im Allgemeinen nicht $A \subseteq B$,
- (d) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,
- (e) A und B sind genau dann stochastisch unabhängig, wenn A und $B^c := \Omega \setminus B$ stochastisch unabhängig sind.

Aufgabe 2

Es sei Ω eine endliche Menge, $P : \mathfrak{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß und $A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{P}(\Omega)$ (mit $n \geq 2$) beliebige Ereignisse. Für jede natürliche Zahl r mit $1 \leq r \leq n$ sei

$$S_r := \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r})$$

die Summation über alle r -elementigen Teilmengen $\{i_1, \dots, i_r\}$ von $\{1, 2, \dots, n\}$. Zeigen Sie durch vollständige Induktion

$$P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{r=1}^n (-1)^{r-1} S_r.$$

Aufgabe 3

- (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei einem Wurf mit zwei fairen Würfeln die Augensumme *drei* zu erhalten.

Warum kommt nicht $\frac{1}{11}$ heraus (denn bei einem Wurf mit zwei Würfeln sind für die Augensumme 11 Ergebnisse möglich)? Wie sieht der Raum der Elementarereignisse aus?

- (b) Eine von drei Karten sei beidseitig schwarz (ss), eine beidseitig rot (rr) und eine habe eine schwarze und eine rote Seite (sr). Der Kartengeber mischt und wendet die Karten hinter seinem Rücken und legt Ihnen eine Karte auf den Tisch. Wenn die sichtbare Seite rot ist, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die andere Seite schwarz ist? Ist dieses Spiel fair?

Aufgabe 4

- (a) Sie erfahren von Ihrer Gesprächspartnerin, dass sie Mutter zweier Kinder ist.
- (i) Sie erfahren, dass das ältere Kind ein Mädchen ist. Wie groß ist Wahrscheinlichkeit, dass das jüngere Kind auch ein Mädchen ist?
 - (ii) Sie erfahren, dass mindestens eines der Kinder ein Mädchen ist. Überlegen Sie sich, wie groß wohl in diesem Falle die Wahrscheinlichkeit ist, dass auch das andere Kind ein Mädchen ist.
- (b) Wir wollen nun den Fall (a)(ii) genauer untersuchen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kinder Mädchen sind, wenn Sie die Information aus (a)(ii) folgendermaßen gewonnen haben:
- (i) Auf die Frage, ob beide Kinder Jungen seien, antwortet Ihre Gesprächspartnerin: *Nein*.
 - (ii) Sie fragen: *Denke an eines Deiner Kinder (wähle zufällig eines aus). Welches Geschlecht hat dieses?* Sie antwortet: *Es ist ein Mädchen*.

Bemerkungen: Wir gehen natürlich davon aus, dass es für werdende Eltern genauso wahrscheinlich ist einen Jungen zu bekommen wie ein Mädchen. Malen Sie sich alle möglichen Kombinationen auf und überlegen sie sich, welche durch die jeweiligen Informationen ausgeschlossen sind.

Wenn Sie alles richtig gemacht haben, dann zeigt Ihnen Aufgabenteil (b), dass die Informationen aus (a)(ii) nicht ausreichen, um die Wahrscheinlichkeiten *eindeutig* zu modellieren; es ist vielmehr auch relevant, auf welchem Wege die Informationen gewonnen wurden.

Abgabe: Montag, 8.5.2017, 14 Uhr.