MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. P. Pickl

SoSe 17
27.07.17

Probeklausur der Vorlesung Stochastik

Nachname: .... Vorname:..........................

Matrikelnummer: .... Studiengang: ....

Geburtsdatum: ....

1	2	3	4	5	$\sum$

Bitte beachten Sie:

(a) **Geben Sie bitte zu jeder Aufgabe mindestens ein Blatt ab, auf dem mindestens Aufgabennummer und Ihr Name steht (auch dann, wenn Sie die Aufgabe nicht bearbeitet haben)!**

(b) **Bitte tragen Sie auf jedem Blatt, das Sie abgeben, Ihren Namen ein!**

(c) Arbeitszeit: 120 Minuten.

(d) Zugelassene Hilfsmittel: Schreibgerät.

(e) **Schreiben Sie auf gar keinen Fall Lösungsvorschläge zu verschiedenen Aufgaben auf das selbe Blatt!**

(f) Bei Bedarf kann zusätzlich Papier angefordert werden.

Viel Erfolg!

Aufgabenstellung

Aufgabe 1. (6 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine diskrete Zufallsgröße mit $\mathbb{E}(\exp(X)) < \infty$. Zeigen Sie direkt und ohne Verwendung der Markov-Ungleichung

$$P(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(\exp(X))}{\exp(a)}.$$

Hinweis: In der Vorlesung und auf den Übungsblättern gezeigte Relationen über den Erwartungswert müssen nicht erneut bewiesen werden.

Aufgabe 2. (6 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Zufallsgröße $X : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$, falls X eine Dichte der Form

$$\rho_\lambda(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} & x > 0 \end{cases}$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}^+$ besitzt.

- Zeigen Sie, dass $\rho_\lambda(x)$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.
- Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

Aufgabe 3. (6 Punkte)

3 Herren, von denen jeder einen Hut trägt, treffen sich zu einer Stammtischrunde. Als sie das Lokal verlassen, greift jeder blind einen der 3 Hüte aus der Garderobe. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass wenigstens einer den richtigen (nämlich seinen eigenen) Hut ergriffen hat?

Aufgabe 4. (6 Punkte)

Sie nehmen an folgendem Glücksspiel teil und wetten auf die 6. Es werden n Würfel geworfen. Kommt die 6 nicht vor, verlieren Sie einen Chip, kommt die 6 bei den n geworfenen Würfeln k-mal vor, gewinnen Sie k Chips. Ab welcher Würfelanzahl n lohnt sich das Spiel für Sie?

Aufgabe 5. (6 Punkte)

In einem Experiment werden 1000 Personen gebeten, sich drei unabhängige Zufallszahlen zwischen 1 und 6 zu überlegen. Für jede Person wird die Zahl "1" notiert, falls alle drei Zahlen unterschiedlich sind, "2" falls genau zwei der Zahlen gleich sind und "3" falls alle drei Zahlen gleich sind.

Das Experiment ergab folgende Daten:

Wert	1	2	3
Häufigkeit	890	108	2

Überprüfen Sie die Hypothese, dass das Ausdenken von Zufallszahlen in diesem Experiment die selbe Verteilung aufweist wie das unabhängige Werfen dreier Laplace-Würfel. Die Wahrscheinlichkeit für den α-Fehler sei mit einem Prozent vorgegeben.