MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

SoSe 2015

Übungen zur Stochastik

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 10

Aufgabe 1

Gegeben sei eine Folge von Zufallsgrößen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen $a \in \mathbb{R}$ in Verteilung konvergiert ($X_n \xrightarrow{D} X \equiv a$). Zeigen Sie, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dann auch stochastisch gegen a konvergiert ($X_n \xrightarrow{P} X \equiv a$).

Aufgabe 2

Man werfe 16 mal eine faire Münze. Mit welcher Wahrscheinlichkeit beobachtet man, dass die Münze entweder 7 oder 8 mal auf „Kopf" fällt? Man bestimme diese Wahrscheinlichkeit einmal

(a) exakt unter Verwendung der Binomialverteilung, einmal

(b) approximativ mithilfe des Zentralen Grenzwertsatzes und schließlich

(c) ebenfalls approximativ mithilfe des Zentralen Grenzwertsatzes, diesmal aber mit Stetigkeitskorrektur.

Aufgabe 3

Sei Ω abzählbar (d.h. endlich oder abzählbar unendlich) und $X, X_1, X_2, ...$ seien darauf definierte Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass in diesem Fall aus der stochastischen Konvergenz der Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen X deren fast sichere Konvergenz gegen X folgt (d.h., dass in diesem Fall stochastische Konvergenz und fast sichere Konvergenz äquivalent sind).

Hinweis: Argumentieren Sie zunächst, dass für alle $\omega_i \in \Omega$ mit $\mathbb{P}(\omega_i) > 0$ und für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) < \mathbb{P}(\omega_i)$ für alle $n > N$. Leiten Sie daraus ab, dass $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega_i) = X(\omega_i)$ für alle $\omega_i \in \Omega$ mit $\mathbb{P}(\omega_i) > 0$ und verwenden Sie die Abzählbarkeit von Ω um zu zeigen, dass die Menge aller anderen ω_i das Wahrscheinlichkeitsmaß null hat.

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass Funktionenfolgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf dem Intervall $[0,1)$ existieren, sodass gilt:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 |f_n(x) - f(x)|\, dx = 0$ für ein $f : [0,1) \to \mathbb{R}$

(ii) $f_n(x)$ konvergiert für *kein* $x \in [0,1)$ punktweise gegen f

Lösungsansatz: Am einfachsten setzen wir $f \equiv 0$ und $f_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir suchen also eine Folge von positiven Funktionen, für die die Fläche unter dem Graphen gegen null konvergiert (Forderung (i)), für die aber gleichzeitig für jedes $x \in [0,1)$ $f_n(x) > \varepsilon$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ und ein $\varepsilon > 0$ gilt (Forderung (ii)). Sehr schön geht das mit Indikatorfunktionen von Intervallen, da in diesem Fall die Fläche unter dem Graphen identisch mit der Länge des jeweiligen Intervalls ist. Finden wir also eine Folge von Intervallen $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die $[0,1)$ unendlich oft überdeckt und deren Intervalllänge gegen null konvergiert, so ist für die Indikatorfunktionen $f_n(x) = \chi_{I_n}(x)$ die Forderung (i) offenbar erfüllt und gleichzeitig gilt $|f_n(x) - f(x)| = \chi_{I_n}(x) = 1$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ und für alle $x \in [0,1)$. Finden Sie also einen wandernden Hut der Höhe 1, der das Intervall $[0,1)$ unendlich oft durchläuft und dabei immer dünner wird.

Bemerkung: Wenn Sie alles richtig gemacht haben, dann haben Sie für den Wahrscheinlichkeitsraum $([0,1), \mathcal{B}_{[0,1)}, \mathbb{P})$ (wobei $\mathbb{P} = \lambda$ gegeben ist durch das Lebesguemaß auf $[0,1)$) gezeigt, dass es Folgen von Zufallsvariablen gibt, die *stochastisch aber nicht fast sicher* konvergieren (beachten Sie, dass $\mathbb{P}(x \in [0,1) \mid f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$).

Abgabe: Dienstag 30.6.2015 , 16 Uhr.