MATHEMATISCHES INSTITUT DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN — SoSe 2015

Übungen zur Stochastik

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 9

Aufgabe 1

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von diskreten Zufallsgrößen. Auch X sei eine Zufallsgröße.

(a) Beweisen Sie:

$$P\left(\lim_{n\to\infty} X_n = X\right) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{k\geq n} |X_k - X| < \epsilon\right) = 1. \tag{1}$$

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des ersten Teiles der Aufgabe:

$$P\left(\lim_{n\to\infty} X_n = X\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} P\left(|X_n - X| < \epsilon\right) = 1 \; \forall \epsilon > 0. \tag{2}$$

Hinweis: Bei Aufabenteil (a) ist hilfreich, zuerst die Äquivalenz $P\left(\lim_{n\to\infty} X_n = X\right) = 1 \Leftrightarrow \forall l \in \mathbb{N} : P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} \{\omega \in \Omega : |X_k(\omega) - X(\omega)| < \frac{1}{l}\}\right) = 1$ zu zeigen.

Aufgabe 2

Starkes Gesetz der großen Zahlen: Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von diskreten und unabhängigen Zufallsgrößen. Weiterhin sei $E(X_k^6)$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ endlich und die X_k seien gleichverteilt mit $E(X_k) = 0$. Der Mittelwert der ersten n Folgenglieder sei gegeben durch $M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$.

(a) Beweisen Sie

$$E\left(|X_k|^i\right) \leq E\left(X_k^6\right) + 1 \quad \forall i \in \{1,2,3,4,5\}. \tag{3}$$

(b) Zeigen Sie, dass es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$P\left(|M_k| > \frac{1}{l}\right) < \frac{c \cdot l^6}{k^3}\left[E(X_1^6) + E(X_1^6)^2 + 1\right]. \tag{4}$$

(c) Folgern Sie mit Hilfe von Lemma 3.30, dass $P\left(\lim_{n\to\infty} M_n = 0\right) = 1$.

Abgabe: Dienstag 23.6.2015 , 16 Uhr.