

Übungen zur Stochastik

Prof. Dr. P. Pickl
Blatt 8

Aufgabe 1

Es sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ diskrete Zufallsgrößen.

- (a) Zeigen Sie: $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X)][Y - \mathbb{E}(Y)])$.
- (b) Wie vereinfacht sich dieser Ausdruck, falls X und Y unabhängig sind?

Aufgabe 2

X und Y seien diskrete reelle Zufallsgrößen. Füllen Sie die Lücken ___ mit den Symbolen $\{\leq, \geq, =\}$ und begründen Sie ihre Antwort:

- (a) $\mathbb{E}(X)$ ___ $\sqrt{\mathbb{E}(X^2)}$,
- (b) $\mathbb{E}(\sin^2(X)) + \mathbb{E}(\cos^2(X))$ ___ 1 ,
- (c) $P(|X| > c)$ ___ $\frac{\mathbb{E}(|X|^3)}{c^3}$ mit $c \in \mathbb{R}^+$,
- (d) $\mathbb{E}(XY)$ ___ $\sqrt{\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)}$,
- (e) $P(X + Y > 10)$ ___ $P(X > 5 \text{ oder } Y > 5)$.

Aufgabe 3

X sei exponentialverteilt mit Dichte $\rho(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ e^{-x} & x > 0. \end{cases}$

- (a) Berechnen Sie $P(X \geq a)$ für $a > 0$.
- (b) Schätzen Sie $P(X \geq a)$ mit Hilfe der Markov-Ungleichung gegen $E(X)$ ab.
- (c) Vergleichen Sie die beiden Resultate.

Aufgabe 4

Wir betrachten einen n -fachen Münzwurf. Die Zufallsgröße X gebe an, wie oft die Münze auf „Kopf“ gefallen ist. Finden Sie Werte n , sodass $P(|X - \frac{n}{2}| \geq 0.01n) \leq 0.1$.

Hinweis: In der Vorlesung wurde gezeigt, dass für eine „faire“ Münze $P(X = k) = B_{n, \frac{1}{2}}(k)$.

Abgabe: Dienstag 16.6.2015 , 16 Uhr.