Übungen zur Stochastik

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 7

Aufgabe 1

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und X eine diskrete reelle Zufallsgröße. Zeigen Sie, dass $|\kappa(X, aX + b)| = 1$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2

Es werden zwei faire Würfel (ein roter und ein grüner) geworfen und ihre Augenzahlen mit den Zufallsvariablen X und Y beschrieben.

(a) Berechnen Sie die Kovarianz von $X + Y$ und $X - Y$.

(b) Sind $X + Y$ und $X - Y$ unabhängig? Beweisen oder widerlegen Sie.

Aufgabe 3

(a) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Gibt es diskrete Zufallsgrößen $X : \Omega \to \mathbb{R}$ und $Y : \Omega \to \mathbb{R}$, sodass $E(X) > 100E(Y)$ aber $P(Y - X \geq 0) \geq 0,99$?

(b) Zeigen Sie, dass es keine diskrete Zufallsgröße $X : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $P(|X| \geq 1) > \frac{1}{2}$ und $\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{2}$ gibt.

Aufgabe 4

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Zufallsgröße heißt exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$, falls X eine Dichte der Form

$$\rho_\lambda(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} & x > 0 \end{cases} \tag{1}$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}^+$ besitzt.

(a) Zeigen Sie, dass ρ_λ eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.

(b) Skizzieren Sie die Verteilungsfunktion $V_X(t)$.

(c) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

Bemerkung: Die Exponentialverteilung spielt eine zentrale Rolle bei der Beschreibung von Lebenszeiten eines Bauteiles oder eines Atoms.

Abgabe: Dienstag 9.6.2015 , 16 Uhr.