MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

SoSe 2015

Übungen zur Stochastik

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 6

Aufgabe 1

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein gegebenes Ereignis in einem gegebenen Zeitintervall genau $k \in \mathbb{N}_0$ mal eintritt, sei gegeben durch die *Poisson-Verteilung* zum Parameter $\lambda > 0$: $p(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

(a) Zeigen Sie, dass die Poisson-Verteilung auf 1 normiert ist und berechnen Sie Erwartungswert und Varianz.

(b) Zeigen Sie, dass sich die Poisson-Verteilung aus der Binomialverteilung $b_{n,p}(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ ergibt, wenn die Grenzübergänge $n \to \infty$ und $p \to 0$ derart ausgeführt werden, dass der Erwartungswert $np := \lambda$ konstant bleibt. Setzen Sie dafür $p = \frac{\lambda}{n}$ und betrachten Sie die Binomialverteilung im Limes $n \to \infty$.

Bemerkung: In der Poisson-Verteilung geht die Symmetrie zwischen Ereignis (mit Wahrscheinlichkeit p) und Gegenereignis (mit Wahrscheinlichkeit $1-p$) aus der Binomialverteilung verloren: So können wir z.B. bei einer Münzwurfreihe nach der Wahrscheinlichkeit für k mal *Kopf* oder l mal *nicht Kopf* ($\equiv$ *Zahl*) fragen (Binomialverteilung). Dagegen können wir zwar nach der Wahrscheinlichkeit fragen, dass ein Blitz in einer gegebenen Region in einer gegebenen Zeitspanne k mal einschlägt (Poisson-Verteilung), aber es ist unsinnig zu fragen, wie wahrscheinlich ein Blitz in dieser Zeitspanne l mal nicht einschlägt.

Aufgabe 2

Wir betrachten eine Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ auf einem endlichen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, deren Erwartungswert in der Vorlesung gemäß $\mathbb{E}(X) := \sum_{i \in I} x_i P(X = x_i)$ definiert wurde.

(a) Zeigen Sie $\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\})$.

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion. Zeigen Sie $\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{i \in I} f(x_i) P(X = x_i)$.

Aufgabe 3

Auf Blatt 4 wurden in Aufgabe 4.b) auf $\Omega = [-1,1]$ die Zufallsvariablen

$$X(x) := \chi_{[0,\frac{1}{2})}(x) - \chi_{[\frac{1}{2},1]}(x) \quad \text{und} \quad Y(x) := -\chi_{[-1,0)}(x) + \chi_{[0,1]}(x)$$

definiert. Es wurde bewiesen, dass X und Y stochastisch abhänging sind. Zeigen Sie (durch direktes Nachrechnen), dass für die Erwartungswerte dennoch gilt: $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Bemerkung: Die Indikatorfunktion (auch charakteristische Funktion genannt) ist genau diejenige Zufallsvariable, deren Erwartungswert gleich der (Laplace-)Wahrscheinlichkeit der entsprechenden Menge ist:

$$\mathbb{E}(\chi_A) = \int_\Omega \frac{1}{|\Omega|} \cdot \chi_A(x)\, dx = \frac{1}{|\Omega|} \int_A dx = \frac{\lambda(A)}{|\Omega|} = P(A)$$

Abgabe: Dienstag 2.6.2015 , 16 Uhr.