MATHEMATISCHES INSTITUT DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

SoSe 2015

Übungen zur Stochastik

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 4

Aufgabe 1

Wir betrachten die Grundemenge $\Omega = \{0,1,2,3\}$ und die beiden Erzeugendensysteme $E_1 = \{\{0,1\},\{1,2\},\{1\}\}$ und $E_2 = \{\{0,1\},\{1,2\}\}$.

(a) Es sei $\mathcal{A}_1^* = \sigma(E_1)$ die von E_1 erzeugte σ-Algebra und $P_1 : \mathcal{A}_1^* \mapsto \mathbb{R}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß mit

$$P_1(\{0,1\}) = P_1(\{1,2\}) = \frac{2}{3} \quad \text{und} \quad P_1(\{1\}) = \frac{1}{3}. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass $P_1 : \mathcal{A}_1^* \mapsto \mathbb{R}$ durch (1) eindeutig bestimmt ist.

(b) Es sei $\mathcal{A}_2^*$ die von E_2 erzeugte σ-Algebra und $P_2 : \mathcal{A}_2^* \mapsto \mathbb{R}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß mit

$$P_2(\{0,1\}) = P_2(\{1,2\}) = \frac{2}{3}. \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass $P_2 : \mathcal{A}_2^* \mapsto \mathbb{R}$ durch (2) nicht eindeutig bestimmt wird.

Bemerkung: Diese Aufgabe ist ein Beispiel des allgemeineren (in der Vorlesung nicht behandelten) Satzes:

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, wobei $\mathcal{F}$ die von $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ erzeugte σ-Algebra ist. Ist $\mathcal{G}$ $\cap$-stabil in dem Sinn, dass mit $A, B \in \mathcal{G}$ auch $A \cap B \in \mathcal{G}$, so ist P bereits durch seine Einschränkung $P|_{\mathcal{G}}$ auf $\mathcal{G}$ eindeutig bestimmt.

Lösen Sie die Aufgabe bitte direkt ohne Hilfe dieses Satzes.

Aufgabe 2

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X, Y : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ reelle Zufallsgrößen. Des Weiteren sei $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass aus der Unabhängigkeit von X und Y die Unabhängigkeit von X und $f(Y)$ folgt.

Aufgabe 3

Betrachten Sie wieder den Wahrscheinlichkeitsraum Ω und die Zufallsvariablen X und Y aus Aufgabe 1 vom letzten Blatt. Überlegen Sie sich nun eine dritte Zufallsvariable $Z : \Omega \longrightarrow \{0,1\}$, welche paarweise unabhängig zu X und Y ist (d.h. es gelte paarweise Gleichung (1) aus Blatt 3), während die Familie von Zufallsvariablen X, Y, Z nicht stochastisch unabhängig ist, d.h. es gibt mindestens eine Kombination $x, y, z \in \{0,1\}$ mit:

$$P\big(\{\omega|X(\omega)=x\} \cap \{\omega|Y(\omega)=y\} \cap \{\omega|Z(\omega)=z\}\big) \\ \neq P\big(\{\omega|X(\omega)=x\}\big) \cdot P\big(\{\omega|Y(\omega)=y\}\big) \cdot P\big(\{\omega|Z(\omega)=z\}\big)$$

Bei geigneter Wahl der Zufallsvariable Z kann man einen Teil der Aufgabe sehr elegant (und einfach) lösen. Dazu schaue man sich am besten noch einmal genau die Aufgabe 1 vom letzten Blatt an.

Aufgabe 4

Für den Zufallsraum $\Omega = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ist die Laplace-Wahrscheinlichkeit dafür, aus Ω blind eine Zahl zu ziehen, die in einer messbaren Teilmenge $A \subseteq \Omega$ liegt, natürlicherweise gegeben durch das normierte Lebesguemaß: $P(A) = \frac{\lambda(A)}{b-a}$.

(a) Aus $\Omega = [0,1]$ wird nun blind eine Zahl gezogen. Bestimmen Sie die Laplace-Wahrscheinlichkeit dafür, dass in der Dezimalentwicklung dieser Zahl

  (i) die erste Ziffer ungerade ist,

  (ii) die zweite Ziffer 4 ist,

  (iii) die Summe der ersten beiden Ziffern 5 ist.

  Zeichnen Sie die Ereignisse (i) und (iii) ins Intervall ein.

(b) Es sei $\Omega = [-1,1]$ und

$$\chi_A : \Omega \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

  die *Indikatorfunktion* einer Teilmenge $A \subseteq \Omega$. Wir definieren nun auf Ω die beiden Zufallsvariablen

$$X(x) := \chi_{[0,\frac{1}{2})}(x) - \chi_{[\frac{1}{2},1]}(x) \quad \text{und} \quad Y(x) := -\chi_{[-1,0)}(x) + \chi_{[0,1]}(x)$$

  Zeigen Sie, dass X und Y stochastisch abhängig sind.

Abgabe: Dienstag 19.5.2015 , 16 Uhr.