Übungen zur Stochastik

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 3

Aufgabe 1

Auf dem Laplace-Raum $\Omega = \{\omega = (i,j) \mid i,j \in \{1,2,3\}\}$ (z.B. zwei-maliges Werfen eines Würfels mit nur drei Seiten) betrachte man folgende zwei Zufallsvariablen:

$$X : \Omega \longrightarrow \{0,1\} \text{ mit } \begin{cases} X(i,j) = 0, & \text{falls } |i-j| \geq 1 \\ X(i,j) = 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

sowie

$$Y : \Omega \longrightarrow \{0,1\} \text{ mit } \begin{cases} Y(i,j) = 0, & \text{falls } j = 3 \\ Y(i,j) = 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Zufallsvariablen X und Y stochastisch unabhängig sind.

Die hier definierten Zufallsvariablen X, Y heißen stochastisch unabhängig, falls für alle möglichen Kombinationen $x, y \in \{0,1\}$ gilt:

$$P\big(\{\omega | X(\omega) = x\} \cap \{\omega | Y(\omega) = y\}\big) = P\big(\{\omega | X(\omega) = x\}\big) \cdot P\big(\{\omega | Y(\omega) = y\}\big). \tag{1}$$

Aufgabe 2

Ein Spamfilter sei so programmiert, dass er Emails mit häufig vorkommenden Redewendungen aussortiert. Nehmen Sie an, dass 80 Prozent ihrer Emails Spam sind. 10 Prozent dieser Spammails enthalten die Redewendung „Sie haben gewonnen“, wohingegen diese Phrase in nur einem Prozent der Emails vorkommt, die keine Spammails sind. Sie erhalten eine Email mit dem Inhalt „Sie haben gewonnen“. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich hierbei um eine Spammail handelt?

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass alle abgeschlossenen Intervalle: $[a,b],]-\infty, a]$ und $[a, \infty[$ (mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$) zusammen ein Erzeugendensystem der Borelmenge $\mathcal{B}$ über $\mathbb{R}$ bilden.

Aufgabe 4

Die Borelmenge über einem metrischen Raum (Ω, d) haben wir als die von den offenen Teilmengen erzeugte σ-Algebra definiert. Diese Aufgabe soll zeigen, dass es im Falle $\Omega = \mathbb{R}$ ausreicht, die Menge aller offenen Intervalle als Erzeuger zu wählen. Sei $\mathcal{B}$ die von allen offenen Intervallen aus $\mathbb{R}$ erzeugte σ-Algebra. Wir zeigen in zwei Schritten , dass jede offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ in $\mathcal{B}$ enthalten ist.
Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ offen. Für alle $x \in U \cap \mathbb{Q}$ und $m \in \mathbb{N}$ definieren wir das offene Intervall $I_{x,m} :=]x - \frac{1}{m}, x + \frac{1}{m}[$ und die Vereinigung all dieser Intervalle (um x), die in U enthalten sind:

$$U_x = \bigcup_{I_{x,m} \subseteq U} I_{x,m} \quad \text{mit } I_{x,m} \subseteq U = \{I_{x,m} | m \in \mathbb{N}, \text{sodass } I_{x,m} \subseteq U\}. \tag{2}$$

(a) Zeigen Sie, dass $U = \bigcup_{x \in U \cap \mathbb{Q}} U_x$.

(b) Erklären Sie mit Hilfe von Aufgabenteil (a), warum $\mathcal{B}$ jede offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ enthält.

Abgabe: Montag, 12.5.2015 , 16 Uhr.