MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. P. Pickl

SoSe 15
07.07.15

Probeklausur der Vorlesung Stochastik

Nachname: .... Vorname:..........................

Matrikelnummer: .... Studiengang: ....

Geburtsdatum: ....

1	2	3	4	5	6	$\sum$

Bitte beachten Sie:

(a) **Geben Sie bitte zu jeder Aufgabe mindestens ein Blatt ab, auf dem mindestens Aufgabennummer und Ihr Name steht (auch dann, wenn Sie die Aufgabe nicht bearbeitet haben)!**

(b) **Bitte tragen Sie auf jedem Blatt, das Sie abgeben, Ihren Namen ein!**

(c) Arbeitszeit: 10:00 - 12:00 Uhr.

(d) Zugelassene Hilfsmittel: Schreibgerät.

(e) **Schreiben Sie auf gar keinen Fall Lösungsvorschläge zu verschiedenen Aufgaben auf das selbe Blatt!**

(f) Beachten Sie, dass die Aufgaben 1. bis 5. jeweils 10 Punkte geben, aber die 6. Aufgabe nur 5 Punkte.

(g) Bei Bedarf kann zusätzlich Papier angefordert werden.

Viel Erfolg!

Aufgabenstellung

Aufgabe 1. (10 Punkte)

Sei Ω eine endliche Menge, $P : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß und $B \subseteq \Omega$ mit $P(B) \neq 0$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$P_B : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad A \mapsto P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist.

Aufgabe 2. (10 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Zufallsgröße $X : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt normalverteilt, falls X eine Dichte der Form

$$\rho(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

mit gewissen $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in \mathbb{R}^+$ besitzt.

- Zeigen Sie, dass $\rho(x)$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.
- Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

Aufgabe 3. (10 Punkte)

Sei Ω eine überabzählbare Menge und $\mathcal{F}$ eine Menge von Teilmengen von Ω, die folgendermaßen definiert ist:

$\Omega \supseteq A \in \mathcal{F}$ genau dann, wenn A oder A^c abzählbar (endlich oder abzählbar unendlich) ist.

Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra ist.

Aufgabe 4. (10 Punkte)

Wir betrachten eine Zufallsvariable $X : \Omega \to \{x_i\}_{i \in I}$ auf einem endlichen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, deren Erwartungswert in der Vorlesung durch $\mathbb{E}(X) := \sum_{i \in I} x_i P(X = x_i)$ definiert wurde. Zeigen Sie

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\}).$$

Aufgabe 5. (10 Punkte)

Ein Versicherungsunternehmen plant sein Angebot auf Versicherungen gegen Blitzeinschlag zu erweitern. Um den damit benötigten Anstieg der Kapitalrücklagen zu berechnen, will das Unternehmen die Anzahl der Blitzeinschläge in Häuser pro Jahr in Bayern wissen. Hierbei kann angenommen werden, dass die Blitzeinschläge in Häuser pro Jahr Poisson-verteilt sind, also

$$P(\text{k Brände/Jahr}) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R}^+.$$

Das Unternehmen stellt die Nullhypothese

$$H_0 : \lambda = 2$$

auf und will diese Vermutung im Folgenden durch einen Hypothesentest mathematisch überprüfen.

- Für welches minimale k führt der Annahmebereich $\{0, 1, \dots, k\}$ zu einem α-Fehler von weniger als 5% ?
- Wie gehen Sie vor, falls im Jahr 2014 in Bayern drei Blitze in Häuser eingeschlagen sind?

Aufgabe 6. (**Achtung: Diese Aufgabe gibt lediglich 5. Punkte.**)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen **richtig oder falsch** sind. Übertragen Sie hierzu die Buchstaben der Aussagen auf Ihren Antwortzettel und notieren Sie, ob die jeweilige Aussage richtig oder falsch ist. Eine Begründung ihrer Entscheidung ist nicht notwendig.
Schreiben Sie ihre Antwort bitte <u>nicht</u> auf die Angabe!

Aussagen:

(A): „Für eine reelle Zufallsgröße X gilt: $\mathbb{E}(X^2) \leq \mathbb{E}(X)^2$. “

(B): „Konvergiert eine Folge X_n gegen X in Verteilung, so konvergiert sie im Allgemeinen auch stochastisch gegen X. “

(C): „Die Verteilungsfunktionen von reellen Zufallsgrößen sind im Allgemeinen linksseitig stetig.“

(D): „Für zwei diskrete reelle Zufallsgrößen X und Y gilt: $\mathbb{E}(XY) \geq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)}$. “

(E): „Für jedes Ω ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ eine σ-Algebra. “