

Übungen zur Stochastik

Prof. Dr. P. Pickl
Blatt 11

Aufgabe 1

Die charakteristische Funktion einer Zufallsgröße X (nicht zu verwechseln mit der auch manchmal charakteristische Funktion genannten Indikatorfunktion χ) ist definiert als der Erwartungswert der Zufallsgröße e^{iyX} mit $y \in \mathbb{R}$: $\Phi_X(y) = E(e^{iyX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iyx} \rho(x) dx$ (mit anderen Worten ist die charakteristische Funktion die Fouriertransformierte der Dichte). Sei nun X eine zentrierte Gaußsche Zufallsgröße mit Varianz $\sigma^2 = \text{Var}(X) < \infty$ und $E(X) = 0$, d.h. $P_X((-\infty, x]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^x dy e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}$. Zeigen Sie, dass die charakteristische Funktion $\Phi_X(y)$ von X ebenfalls gegeben ist durch eine Gaußfunktion mit der inversen Breite $\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{\sigma^2}$, d.h. $\Phi_X(y) \stackrel{!}{=} e^{-\frac{\sigma^2 y^2}{2}}$.

Anleitung: Der Integrand (ohne Normierung) des zu berechnenden Integrals ist gegeben durch $e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} e^{iyx} =: g(x)$. Betrachten Sie zunächst das Integral von $-R$ nach R . Führen Sie eine quadratische Ergänzung im Exponenten von g durch, d.h. schreiben Sie $g(x)$ in der Form $e^{-(\vartheta(x,y))^2 - \frac{y^2\sigma^2}{2}}$, bestimmen Sie die Funktion $\vartheta(x,y)$, substituieren Sie die Integrationsvariable x durch ϑ und achten Sie darauf, dass die neuen Integrationsgrenzen korrekt gewählt sind. Der neue Integrationsweg verläuft in der unteren komplexen Halbebene parallel zur reellen Achse. Ergänzen Sie diesen Weg zu einem geschlossenen rechteckigen Weg, sodass der obere Teil des Weges wieder entlang der reellen Achse verläuft (zeichnen Sie ein Bild des Weges). Argumentieren Sie, dass die beiden Anteile des Weges, die parallel zur imaginären Achse verlaufen, im Limes $R \rightarrow \infty$ keinen Beitrag zum Integral liefern. Da die zu integrierende Funktion überall (also insbesondere innerhalb des Integrationsweges) holomorph ist, können Sie den Cauchy-Integralsatz verwenden, um zu argumentieren, dass das Integral entlang des geschlossenen Integrationsweges verschwindet. Nun können Sie recht einfach den Wert des zu berechnenden Integrals auf den Wert des Standard Gaußintegrals entlang der reellen Achse zurückführen (letzteres wurde auf Übungsblatt 6 berechnet).

Aufgabe 2

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathcal{B}$ die Borelsche σ -Algebra sowie $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ zwei messbare Funktionen, für die jeweils gilt: $X(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$ und $Y(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$. Zeigen Sie, dass für beliebiges $\varepsilon > 0$ die Menge $C_1 = \left\{ \omega \mid |X(\omega) - Y(\omega)| < \varepsilon \right\}$ in der σ -Algebra $\mathcal{A}$ enthalten ist.

Hinweis: Betrachten Sie die Menge $C_2 = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \left(\left\{ \omega \mid |X(\omega) - q| < \frac{\varepsilon}{2} \right\} \cap \left\{ \omega \mid |Y(\omega) - q| < \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right)$ und zeigen Sie, dass diese Element der σ -Algebra $\mathcal{A}$ ist. Zeigen Sie nun, dass die Mengen C_1 und C_2 identisch sind.

Aufgabe 3

Über die grundlegende Natur des Zufalls. Stellen Sie sich den n -maligen Münzwurf (eine Münze, die immer wieder geworfen wird) als Bewegungsablauf vor, dessen physikalische Beschreibung wir ernst nehmen wollen. In der Physik lernt man, dass ein Bewegungsablauf (wie z.B. die Bewegung einer Kanonenkugel, eine Zuges oder wie hier, der n -mal geworfenen Münze) durch die Newtonschen Bewegungs-Gesetze sowie den Anfangsbedingungen dieser Bewegung (hier etwas vereinfacht: die Ausgangslage der Münze vor dem ersten Wurf) vollständig bestimmt ist. Man stelle sich am besten eine idealisierte Münzwurf-Maschine vor, die für die dynamische Beschreibung vernachlässigt werden kann, sprich: die Anfangslage der Münze vor dem ersten Wurf bestimmt den Ausgang der gesamten Wurfreihe bereits vollständig (falls Sie Bedenken haben: für die Anfangslage einer Kugel im zur Münzwurfreihe völlig analogen Galtonbrett wäre diese hier etwas künstlich anmutende Annahme erfüllt). Wenn aber der Ausgang der gesamten Wurfreihe bereits vollständig durch seine Anfangslage bestimmt ist, oder anders ausgedrückt, die Wurfreihe auf dieser Ebene der Beschreibung vollständig deterministisch abläuft, dann bleibt scheinbar kein Platz mehr für den Zufall. Es stellt sich also die Frage, welche Bedeutung die stochastische Modellierung der Wahrscheinlichkeiten sowie die Annahme der stochastischen Unabhängigkeit der aufeinander folgenden Würfe aus dieser Sicht auf die Dinge besitzen.

- (a) Machen Sie sich den hier dargestellten (scheinbaren) Konflikt zwischen physikalischem Bewegungsablauf und stochastischer Modellierung der Ausgänge klar.
- (b) Versuchen Sie die Bedeutung der stochastischen Unabhängigkeit auf der physikalischen Ebene anhand des Beispiels des n -maligen Münzwurfes zu verstehen. Verwenden Sie dazu die Resultate der Aufgabe 1 aus Blatt 10. *Als mögliche Anfangsbedingungen nehme man die Anfangslage des Mittelpunkts der Münze auf dem Intervall $[0, 1]$. Wie können die Rademacher-Funktionen als Prototyp eines Erklärungsmodells der Ausgänge einer Münzwurfreihe und deren Unabhängigkeit verstanden werden?*
- (c) Wenn Sie alles richtig gemacht haben, sollte Ihnen nun klar sein, dass Zufall und Wahrscheinlichkeit unmittelbar nichts mit der praktischen (Un-)Vorhersagbarkeit eines komplizierten Bewegungsablaufes zu tun haben, sondern tatsächlich eine viel grundlegendere Rolle in der Naturbeschreibung einnehmen.
- (d) Ein wichtiger Aspekt, der hier noch unberücksichtigt blieb, ist die Dynamik. Welche Eigenschaften muss diese besitzen, um so etwas wie stochastische Unabhängigkeit in Aufgabenteil (a) zu erzeugen?

Abgabe: Montag, 8.7.2013 , 12 Uhr.