MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN SoSe 2013

Übungen zur Stochastik

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 10

Aufgabe 1

Die sogenannten Rademacher-Funktionen $r_k : [0,1] \to \{0,1\}$, $k \in \mathbb{N}$, sind folgendermaßen definiert: Sei $x \in [0,1]$ in Binärdarstellung durch $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot 2^{-i}$, $x_i \in \{0,1\}$, gegeben, dann ist $r_k(x) = x_k$.

(a) Skizzieren sie die Funktionen r_k für $k = 1,2,3$ und machen Sie sich dabei klar, auf welche Weise das Intervall $[0,1]$ (das Urbild der Abbildung!) durch die Rademacher-Funktionen für beliebige $k \in \mathbb{N}$ vergröbert wird.

Denken wir uns nun das Intervall $[0,1]$ mit der Borel-Algebra $\mathcal{B}$ und dem Wahrscheinlichkeits-Maß $P = \lambda$ als Wahrscheinlichkeitsraum und betrachten die Rademacher-Funktionen als Zufallsgrößen auf diesem.

(b) Zeigen Sie, dass die Rademacher-Funktionen r_1, r_2 und r_3 stochastisch unabhängig sind und machen Sie sich - mithilfe der Einsicht aus Teil (a) - klar, dass dies ebenfalls für eine beliebig große Familie von Rademacher-Funktionen gilt. *Tatsächlich sind die Rademacher-Funktionen ein schönes Beispiel für die nicht-triviale Existenz einer unendlichen Folge stochastisch unabhängiger Zufallsgrößen.*

(c) Zeigen Sie, dass die Zufallsgröße $S_n : [0,1] \to \{0,1,2,...,n\}$, $n \in \mathbb{N}$, definiert als die endliche Summe von Rademacher-Funktionen $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} r_k(x)$ gemäß $B(n, p = \frac{1}{2})$ binomialverteilt ist; d.h., dass für $l \in \{0,1,2,...,n\}$ gilt:

$$P_{S_n}(l) = P(S_n^{-1}(l)) = \binom{n}{l} \left(\frac{1}{2}\right)^n .$$

Hinweis: Gefragt ist hier nach dem Inhalt der Menge $S_n^{-1}(l) = \{x | \sum\limits_{k=1}^{n} r_k(x) = l\} \in \mathcal{B}$:

$$\lambda(S_n^{-1}(l)) = \int\limits_0^1 \chi_{\{S_n^{-1}(l)\}}(x)\, dx.$$

Dieses Integral berechne man mithilfe folgender Darstellung der Indikatorfunktion: $\chi_{\{S_n^{-1}(l)\}}(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{i\left[\sum\limits_{k=1}^{n} r_k(x) - l\right] y} dy$ (warum gilt diese?) sowie der stochastischen Unabhängigkeit der Rademacher-Funktionen.

Aufgabe 2

Sei Ω abzählbar (d.h. endlich oder abzählbar unendlich) und $X, X_1, X_2, ...$ seien darauf definierte Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass in diesem Fall aus der stochastischen Konvergenz der Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen X deren fast sichere Konvergenz gegen X folgt (d.h., dass in diesem Fall stochastische Konvergenz und fast sichere Konvergenz äquivalent sind).

Hinweis: Argumentieren Sie zunächst, dass für alle $\omega_i \in \Omega$ mit $\mathbb{P}(\omega_i) > 0$ und für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) < \mathbb{P}(\omega_i)$ für alle $n > N$. Leiten Sie daraus ab, dass $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega_i) = X(\omega_i)$ für alle $\omega_i \in \Omega$ mit $\mathbb{P}(\omega_i) > 0$ und verwenden Sie die Abzählbarkeit von Ω um zu zeigen, dass die Menge aller anderen ω_i das Wahrscheinlichkeitsmaß null hat.

Abgabe: Montag, 1.7.2013 , 12 Uhr.