MATHEMATISCHES INSTITUT DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

SoSe 2013

Übungen zur Stochastik

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 9

Aufgabe 1

X und Y seinen stochastisch unabhängige, mit Parameter p geometrisch verteilte Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum Ω. Finden Sie die Verteilung der Zufallsvariable $Z = \min(X, Y)$ (d.h. $Z(\omega) = \min(X(\omega), Y\omega))$ für alle $\omega \in \Omega$).

Hinweis: Statt $\mathbb{P}(Z = n)$ direkt zu berechnen, empfiehlt es sich zunächst die Verteilung $\mathbb{P}(Z \geq n)$ zu betrachten. Aufgrund der Unabhängigkeit von X und Y können Sie recht einfach zeigen, dass sich letztere Verteilung als Produkt entsprechender Verteilungen für X und Y schreiben lässt, diese können Sie mit der geometrischen Verteilung berechnen (geometrische Reihe!) und aus Ihrem Ergebnis schließlich die Verteilung $\mathbb{P}(Z = n)$ ableiten.

Aufgabe 2

(a) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz der Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$ (auch Gaußverteilung genannt) bzw. der normal- (auch gauß-) verteilten Zufallsgröße X, die durch

$$P(X \leq a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} dx \tag{1}$$

gegeben ist.

(b) Zeigen Sie, dass für die Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$ folgendes Transformationsgesetz zur Standard-Normalverteilung $N(0, 1)$ gilt:

$$F_{\mu,\sigma^2}(x) = F_{1,0}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Die Werte der Standardnormalverteilung kann man in zahlreichen Tabellen nachschlagen (z.B. unter http://de.wikipedia.org/wiki/Tabelle_ Standardnormalverteilung). Mithilfe des

Transformationsgesetzes ist es daher möglich, die Wahrscheinlichkeiten für beliebige normalverteilte Zufallsgrößen einfach und schnell abzulesen. Zur Erinnerung: Bei der Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mittels einer $N(\mu, \sigma^2)$-verteilten Funktion, tritt ein kompliziertes, im Allgemeinen analytisch nicht lösbares Integral auf (Gleichung (1)).

(c) Um eine Vorstellung von der Bedeutung der Standardabweichung σ bei der Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$ zu bekommen, soll nun

$$P([\mu - k\sigma, \mu + k\sigma])$$

für $k \in \mathbb{N}$ berechnet werden.

Hinweis: Verwenden Sie hierzu wieder obiges Transformationsgesetz sowie folgende Eigenschaft der $N(0,1)$-Verteilung: $F(-x) = 1 - F(x)$ (warum gilt diese?).

Schauen Sie nun in einer Tabelle zur Standard-Normalverteilung (s.o.) die Werte für $k = 1, 2, 3$ nach. Skizzieren Sie die Resultate und interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass Funktionenfolgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf dem Intervall $[0, 1)$ existieren, sodass gilt:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 |f_n(x) - f(x)|\, dx = 0$ für ein $f : [0, 1) \to \mathbb{R}$

(ii) $f_n(x)$ konvergiert für *kein* $x \in [0, 1)$ punktweise gegen f

Lösungsansatz: Am einfachsten setzen wir $f \equiv 0$ und $f_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir suchen also eine Folge von positiven Funktionen, für die die Fläche unter dem Graphen gegen null konvergiert (Forderung (i)), für die aber gleichzeitig für jedes $x \in [0, 1)$ $f_n(x) > \varepsilon$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ und ein $\varepsilon > 0$ gilt (Forderung (ii)). Sehr schön geht das mit Indikatorfunktionen von Intervallen, da in diesem Fall die Fläche unter dem Graphen identisch mit der Länge des jeweiligen Intervalls ist. Finden wir also eine Folge von Intervallen $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die $[0, 1)$ unendlich oft überdeckt und deren Intervalllänge gegen null konvergiert, so ist für die Indikatorfunktionen $f_n(x) = \chi_{I_n}(x)$ die Forderung (i) offenbar erfüllt und gleichzeitig gilt $|f_n(x) - f(x)| = \chi_{I_n}(x) = 1$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ und für alle $x \in [0, 1)$. Finden Sie also einen wandernden Hut der Höhe 1, der das Intervall $[0, 1)$ unendlich oft durchläuft und dabei immer dünner wird.

Bemerkung: Wenn Sie alles richtig gemacht haben, dann haben Sie für den Wahrscheinlichkeitsraum $([0, 1), \mathcal{B}_{[0,1)}, \mathbb{P})$ (wobei $\mathbb{P} = \lambda$ gegeben ist durch das Lebesguemaß auf $[0, 1)$) gezeigt, dass es Folgen von Zufallsvariablen gibt, die *stochastisch aber nicht fast sicher* konvergieren (beachten Sie, dass $\mathbb{P}(x \in [0, 1) \mid f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$).

Abgabe: Montag, 24.6.2013 , 12 Uhr.