MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

SoSe 2013

Übungen zur Stochastik

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 8

Aufgabe 1

Wiederholungen zur Laplace-Wahrscheinlichkeit. Begründen Sie Ihre Antworten immer!

(a) Sie wetten, dass in einer 10er Reihe von Münzwürfen keinmal Kopf kommt. Wenn Sie verlieren, zahlen Sie 10 Euro, wenn Sie gewinnen, bekommen Sie 100 Euro. Würden Sie spielen?

(b) Nun kommt tatsächlich kein Kopf in der 10er Reihe. Ihre Gegenspielerin will noch einmal spielen. Sie sagen: „Wenn die Münze nun noch einmal 10 mal geworfen wird, dann wette ich ja de facto, dass bei 20 Würfen kein Kopf kommt. Das ist unfair.“ Haben Sie recht?

(c) Sie dürfen 100-mal hintereinander wetten. Ihr Einsatz bleibt immer 10 Euro, der Einsatz Ihrer Gegnerin verdoppelt sich jedes Mal. Ist das ein verlockendes Angebot?

(d) Sie werfen in einem Würfelspiel so lange, bis eine 6 kommt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „6 kommt nicht zum ersten Mal im 10. Wurf“.

(e) Beim Lotto 6 aus 49 (ohne Zusatzzahl) wird jede Woche neu gezogen. Es gibt Spieler, die immer 1, 2, 3, 4, 5, 6 ankreuzen, und Spielerinnen, die jedes Mal die Zahlen zufällig ankreuzen. Wer hat die bessere Chance 6 Richtige zu haben? Wer verhält sich klüger? Wie viele Wochen denken Sie spielen zu müssen, damit Sie mit einem Hauptgewinn rechnen können? Warum gibt es Leute, die tatsächlich 6 Richtige haben?

Aufgabe 2
Man hat ein liniertes Blatt mit N parallelen Linien im Abstand 1. Man lasse eine Nadel der Länge 1 aus großer Höhe auf das linierte Blatt fallen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Nadel eine Linie schneidet?

Zunächst erkläre man, dass es ausreicht, sich auf das Intervall zwischen zwei gegebenen Linien (z.B. die Linien 0 und 1) zu beschränken, oder anders formuliert: Man führe die gesuchte Wahrscheinlichkeit P(‘Nadel schneidet eine Linie’) auf die bedingte Wahrscheinlichkeit P(’Nadel schneidet‘ | ’Nadelmitte liegt im Intervall $[0,1]$‘) zurück.

Die Lage der Nadel wird durch zwei Parameter bestimmt: Die Koordinate des Nadelmittelpunktes X entlang der Blattlänge (d.h. senkrecht zu den Linien), sowie der Winkel Θ zwischen der Nadel und einer beliebigen Senkrechten zu den Linien. Dazu setze man folgendes voraus:

(1) Die Zufallsgröße X sei gleichmäßig auf $[0,1]$ verteilt, d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass X im Bereich Δx liegt, ist Δx.

(2) Die Zufallsgröße Θ sei gleichmäßig auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ verteilt, d.h. mit Wahrscheinlichkiet $\frac{d\theta}{\pi}$ liegt Θ im Bereich $d\theta$.

(2) die Zufallsgrößen X und Θ sind unabhängig.

Mithilfe einer einfachen geometrischen Überlegung lässt sich die Aufgabe nun lösen.

Aufgabe 3
Die Wahrscheinlichkeit, dass ein gegebenes Ereignis in einem gegebenen Zeitintervall genau $k \in \mathbb{N}_0$ mal eintritt, sei gegeben durch die *Poisson-Verteilung* zum Parameter $\lambda > 0$: $p(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

(a) Zeigen Sie, dass die Poisson-Verteilung auf 1 normiert ist und berechnen Sie Erwartungswert und Varianz.

(b) Zeigen Sie, dass sich die Poisson-Verteilung aus der Binomialverteilung $b_{n,p}(k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ ergibt, wenn die Grenzübergänge $n \to \infty$ und $p \to 0$ derart ausgeführt werden, dass der Erwartungswert $np := \lambda$ konstant bleibt. Setzen Sie dafür $p = \frac{\lambda}{n}$ und betrachten Sie die Binomialverteilung im Limes $n \to \infty$.

Bemerkung: In der Poisson-Verteilung geht die Symmetrie zwischen Ereignis (mit Wahrscheinlichkeit p) und Gegenereignis (mit Wahrscheinlichkeit $1-p$) aus der Binomialverteilung verloren: So können wir z.B. bei einer Münzwurfreihe nach der Wahrscheinlichkeit für k mal *Kopf* oder l mal *nicht Kopf* ($\equiv$ *Zahl*) fragen (Binomialverteilung). Dagegen können wir zwar nach der Wahrscheinlichkeit fragen, dass ein Blitz in einer gegebenen Region in einer gegebenen Zeitspanne k mal einschlägt (Poisson-Verteilung), aber es ist unsinnig zu fragen, wie wahrscheinlich ein Blitz in dieser Zeitspanne l mal nicht einschlägt.

Abgabe: Montag, 17.6.2013 , 12 Uhr.