MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

SoSe 2013

Übungen zur Stochastik

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 6

Aufgabe 1

Ein fairer Würfel wird n mal geworfen. Wir betrachten die relative Häufigkeit des Ereignisses *'Augenzahl vier'*. Wie groß muss n sein, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die relative Anzahl der gewürfelten *'Vierer'* (das ist die empirische relative Häufigkeit des Ereignisses *'Augenzahl vier'*) höchstens um 0.01 von ihrem zu erwartenden Wert $\frac{1}{6}$ abweicht, größer als $0,9$ ist? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für obige Abweichung mindestens, wenn man den Würfel 1.000.000 wirft?

Aufgabe 2

Seien Ω' und Ω zwei Mengen und $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über Ω, sowie $f : \Omega' \to \Omega$ und $g : \Omega \to \Omega'$ Abbildungen. Zeigen Sie, dass es sich bei den Mengen-Systemen

(a) $f^{-1}(\mathcal{A}) = \{f^{-1}(A) | A \in \mathcal{A}\}$

(b) $\mathcal{A}' = \{A' \subset \Omega' | g^{-1}(A') \subset \mathcal{A}\}$

(jeweils) um σ-Algebren über Ω' handelt.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass die offenen Intervalle auf $\mathbb{R}$ die selbe Borel-Algebra erzeugen wie die abgeschlossenen Intervalle, d.h. zeigen Sie, dass sich ein beliebiges offenes Intervall mithilfe elementarer Mengenoperationen (Schneiden, Vereinigen und Komplemente bilden) durch abgeschlossene Intervalle konstruieren lässt und umgekehrt.

Aufgabe 4

Für den Zufallsraum $\Omega = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ist die Laplace-Wahrscheinlichkeit dafür, aus Ω blind eine Zahl zu ziehen, die in einer messbaren Teilmenge $A \subseteq \Omega$ liegt, natürlicherweise gegeben durch das normierte Lebesguemaß: $P(A) = \frac{\lambda(A)}{b-a}$.

(a) Aus $\Omega = [0, 1]$ wird nun blind eine Zahl gezogen. Bestimmen Sie die Laplace-Wahrscheinlichkeit dafür, dass in der Dezimalentwicklung dieser Zahl

  (i) die erste Ziffer ungerade ist,

  (ii) die zweite Ziffer 4 ist,

  (iii) die Summe der ersten beiden Ziffern 5 ist.

  Zeichnen Sie die Ereignisse (i) und (iii) ins Intervall ein.

(b) Es sei $\Omega = [-1, 1]$ und

$$\chi_A : \Omega \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

  die *Indikatorfunktion* einer Teilmenge $A \subseteq \Omega$. Wir definieren nun auf Ω die beiden Zufallsvariablen

$$X(x) := \chi_{[0,\frac{1}{2})}(x) - \chi_{[\frac{1}{2},1]}(x) \quad \text{und} \quad Y(x) := -\chi_{[-1,0)}(x) + \chi_{[0,1]}(x)$$

  Zeigen Sie, dass X und Y stochastisch abhängig sind, dass aber gleichzeitig trotzdem für die Erwartungswerte gilt: $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$.

Bemerkung: Die Indikatorfunktion (auch charakteristische Funktion genannt) ist genau diejenige Zufallsvariable, deren Erwartungswert gleich der (Laplace-)Wahrscheinlichkeit der entsprechenden Menge ist:

$$\mathbb{E}(\chi_A) = \int_\Omega \frac{1}{|\Omega|} \cdot \chi_A(x)\, dx = \frac{1}{|\Omega|} \int_A dx = \frac{\lambda(A)}{|\Omega|} = P(A)$$

Abgabe: Montag, 3.6.2013 , 12 Uhr.