MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN SoSe 2013

Übungen zur Stochastik

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 5

Aufgabe 1

Betrachten Sie wieder den Wahrscheinlichkeitsraum Ω und die Zufallsvariablen X und Y aus Aufgabe 1 vom letzten Blatt. Überlegen Sie sich nun eine dritte Zufallsvariable $Z : \Omega \longrightarrow \{0, 1\}$, welche paarweise unabhängig zu X und Y ist (d.h. es gelte paarweise Gleichung (1) aus Blatt 4), während die Familie von Zufallsvariablen X, Y, Z nicht stochastisch unabhängig ist, d.h. es gibt mindestens eine Kombination $x, y, z \in \{0, 1\}$ mit:

$$P\big(\{\omega|X(\omega) = x\} \cap \{\omega|Y(\omega) = y\} \cap \{\omega|Z(\omega) = z\}\big) \\ \neq P\big(\{\omega|X(\omega) = x\}\big) \cdot P\big(\{\omega|Y(\omega) = y\}\big) \cdot P\big(\{\omega|Z(\omega) = z\}\big)$$

Bei geigneter Wahl der Zufallsvariable Z kann man einen Teil der Aufgabe sehr elegant (und einfach) lösen. Dazu schaue man sich am besten noch einmal genau die Aufgabe 1 vom letzten Blatt an.

Aufgabe 2

Zeigen Sie

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x-x_0)^2} \, \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$,

(c) $\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\alpha(x-x_0)^2} \, \mathrm{d}x = x_0 \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$,

(d) $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha(x-x_0)^2} \, \mathrm{d}x = \left(\frac{1}{2\alpha} + x_0^2\right) \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$.

(e) $n! = \Gamma(n+1)$, wobei die Gammafunktion durch $\Gamma(t) := \int_0^{\infty} e^{-x} x^{t-1} \, \mathrm{d}x$ definiert ist.

Hinweis: Um das Integral aus Aufgabenteil (a) zu berechnen, berechnen Sie zunächst das Integral $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ in Polarkoordinaten (Jacobi-Determinante nicht vergessen!) und leiten Sie aus Ihrem Ergebnis und dem Satz von Fubini den Wert des Integrals aus (a) ab.

Aufgabe 3

Schätzen Sie (ähnlich wie in Aufgabe 3 b auf dem letzen Blatt) die Wahrscheinlichkeit dafür ab, dass Sie bei 1000-maligem Würfeln eine Augensumme größer oder gleich 4000 erreichen. Benutzen Sie diesmal für die Abschätzung den Satz vom exponentiellen Abfall aus der Vorlesung. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Wert vom letzten Blatt.

Der Satz vom exponentiellen Abfall wurde nur für Zufallsvariablen mit verschwindendem Erwartungswert bewiesen. Stellen Sie sich deshalb zunächst einen Würfel mit den Augenzahlen $\{-2.5, -1.5, -0.5, +0.5, +1.5, +2.5\}$ *vor. Vergewissern Sie sich, dass bei diesem Würfel der Erwartungswert gleich null ist und schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür ab, mit diesem Würfel in 1000 Würfen eine Augenzahl von 500 oder mehr zu erreichen. Warum ist hiermit die oben gestellte Aufgabe gelöst?*

Aufgabe 4

Sei Ω eine überabzählbare Menge und $\mathcal{F}$ die Menge von Teilmengen von Ω, die definiert ist durch die Eigenschaft:

$$\Omega \supseteq \mathscr{A} \in \mathcal{F} \text{ genau dann, wenn } \mathscr{A} \text{ oder } \mathscr{A}^c \text{ abzählbar ist}$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra ist.

Abgabe: Montag, 27.5.2013 , 12 Uhr.