MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

SoSe 2013

Übungen zur Stochastik

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 4

Aufgabe 1

Auf dem Laplace-Raum $\Omega = \{\omega = (i,j) \mid i,j \in \{1,2,3\}\}$ (z.B. zwei-maliges Werfen eines Würfels mit nur drei Seiten) betrachte man folgende zwei Zufallsvariablen:

$$X : \Omega \longrightarrow \{0,1\} \text{ mit } \begin{cases} X(i,j) = 0, & \text{falls } |i-j| \geq 1 \\ X(i,j) = 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

sowie

$$Y : \Omega \longrightarrow \{0,1\} \text{ mit } \begin{cases} Y(i,j) = 0, & \text{falls } j = 3 \\ Y(i,j) = 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Zufallsvariablen X und Y stochastisch unabhängig sind.

Die hier definierten Zufallsvariablen X, Y heißen stochastisch unabhängig, falls für alle möglichen Kombinationen $x, y \in \{0,1\}$ gilt:

$$P\big(\{\omega | X(\omega) = x\} \cap \{\omega | Y(\omega) = y\}\big) = P\big(\{\omega | X(\omega) = x\}\big) \cdot P\big(\{\omega | Y(\omega) = y\}\big). \tag{1}$$

Aufgabe 2

(a) Sei $\{(A_i)_{i\in I}\}$ eine disjunkte Zerlegung der Ereignismenge Ω, d.h. $\Omega = \cup_{i\in I} A_i$ sowie $A_i \cap A_j = \varnothing \ \forall\, i \neq j \in I$, mit $P(A_i) > 0 \ \forall\, i \in I$. Weiter sei B ein Ereignis mit $P(B) > 0$. Beweisen Sie mithilfe des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit aus der Vorlesung, die *Formel von Bayes*:

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j) \cdot P(B|A_j)}{\sum_{i\in I} P(A_i) \cdot P(B|A_i)}$$

für beliebiges $j \in I$.

(b) Drei Gefangene A, B und C befinden sich in einer Todeszelle. Genau einer soll am nächsten Tag hingerichtet werden. Keiner weiß, wer es ist. Gefangener A fragt den Wärter, wer morgen hingerichtet werde. Der Wärter, der den Namen kennt, sagt wahrheitsgemäß: *Ich darf den Namen nicht verraten, aber ich darf versichern, dass es nicht der Gefangene B sein wird.* Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Gefangene A am nächsten Tag hingerichtet wird?

Nehmen Sie dazu an, dass der Wärter mit gleicher Wahrscheinlichkeit B oder C nennt, wenn A selbst der zum Tode verurteilte ist sowie, dass der Wärter in keinem Fall dem Gefangenen A versichert, dass er es ist, der nicht hingerichtet werde.

Aufgabe 3

(a) Auf einem Fest werden 300 Lose verkauft, davon sind 150 Lose Nieten, bei 100 Losen gewinnt man einen Preis im Wert von 20 €, bei 40 Losen einen Preis im Wert von 50 €, bei 9 Losen einen Preis im Wert von 80 €, der Haupttreffer bringt einen Preis im Wert von 1000 €.

(1) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz des Preises!

(2) Überlegen Sie sich eine andere Aufteilung der Lose und Gewinne, die den selben Erwartungswert aber eine andere Varianz liefert und denken Sie dabei über die Bedeutung der Varianz nach.

(b) Schätzen Sie mit Hilfe der Tschebyscheff-Ungleichung die Wahrscheinlichkeit dafür ab, dass sie bei 1000-maligem Würfeln eine Augensumme größer oder gleich 4000 erreichen.

Aufgabe 4

(a) Wir wollen n Objekte auf r Kästen so verteilen, dass für jedes $1 \leq k \leq r$ in Kasten k genau n_k Objekte zum Liegen kommen. Wie viele mögliche Anordnungen (ohne Beachtung der Reihenfolge) gibt es?

(b) Argumentieren Sie, warum die binomische Formel gilt! Überlegen Sie dazu, wie diese Formel mit der Kombinatorik verbunden ist.

$$(x_1 + x_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_1^{n-k} x_2^k$$

(c) Stellen Sie analog eine Formel zur Berechnung von $(x_1 + ... + x_r)^n$ auf.

Abgabe: Montag, 20.5.2013 , 12 Uhr.