MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN SoSe 2013

Übungen zur Stochastik

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 3

Aufgabe 1

Eine Münze wird 10 mal geworfen. Wir arbeiten mit der Laplace Wahrscheinlichkeit. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten durch saubere Argumentation, indem Sie die Ereignisse aufschreiben. Unabhängigkeit meint hier immer die stochastische Unabhängigkeit

(a) Kopf im 1.Wurf ist unabhängig von Zahl im 1.Wurf.

(b) Kopf im 9.Wurf ist unabhängig von Kopf in den Würfen 1 bis 8.

(c) Kopf zum ersten Mal im 2.Wurf ist unabhängig von Kopf zum ersten Mal im 4.Wurf.

(d) Kopf zum ersten Mal im 2.Wurf ist unabhängig von Kopf im 4.Wurf.

(e) A und B seien Ereignisse und $A \cup B = \Omega$. A und B sind unabhängig sobald A und B echte Teilmengen von Ω sind.

Aufgabe 2

Drei Spieler A,B und C wollen sich mit Pistolen duellieren. Es soll jeweils reihum ein Schuss in der Reihenfolge A,B,C abgegeben werden, mit Wiederholung dieser Prozedur bis ein glücklicher Sieger feststeht (d.h. Spieler A schießt auf B, B auf C und C auf A usw.; wenn ein Spieler gestorben ist, schießen die beiden anderen abwechselnd aufeinander). Der schlechteste Schütze A trifft in rund 50% aller Fälle, der Spieler B hat Trefferquote von 80% und Spieler C trifft immer. Wie groß sind die Überlebenswahrscheinlichkeiten der einzelnen Schützen? Was passiert, wenn das Schlitzohr A als erster in die Luft schießt?

Aufgabe 3

Im Physiklabor verlassen zwei Atome eine gemeinsame Quelle und werden weit voneinander getrennt. Dann wird an jedem der Atome eine Messung durchgeführt, wobei beide Messapparate jeweils eine von drei verschiedenen Größen α, β oder γ messen und die Messergebnisse jeweils zwei mögliche Werte $\sigma_q^{(i)} \in \{J, N\}$, $q \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$ annehmen können, dabei indiziert $i = 1, 2$ die beiden Atome (denken Sie als Analogie an das Beispiel aus der Vorlesung mit den beiden Studenten, wobei nun jeweils eine von drei möglichen Fragen mit den möglichen Antworten Ja oder Nein gestellt wird, z.B. bedeutet $\sigma_\beta^{(2)} = N$, dass Person 2 die Frage β gestellt bekommt und darauf mit Nein antwortet). Das Experiment wird nun oft wiederholt, wobei z.B. ein Zufallsgenerator auf jeder Seite unmittelbar vor der Messung entscheidet, welche der drei Größen gemessen wird. Es stellt sich heraus, dass wenn immer auf beiden Seiten die gleichen Messungen durchgeführt werden, auf beiden Seiten auch die selben Messresultate auftreten (*perfekte Korrelationen*) und wenn immer unterschiedliche Messungen durchgeführt werden, stimmen die Resultate in $\frac{1}{4}$ der Fälle überein.

(a) Nehmen wir an, wir erklären die perfekten Korrelationen bei gleichen Messungen dadurch, dass die Messresultate schon vor der Messung feststanden, z.B. bei der Präparation des Teilchenpaares in der gemeinsamen Quelle festgelegt wurden. Führen Sie diese Annahme für ein beliebiges Erklärungsmodell, das die richtigen empirischen relativen Häufigkeiten durch Wahrscheinlichkeiten vorhersagt (d.h. insbesondere $P(\sigma_q^{(1)} = \sigma_r^{(2)}) = \frac{1}{4}$ für $q \neq r$), zu einem Widerspruch.

(b) Was gibt es für Alternativen zur in (a) widerlegten Annahme, um die perfekten Korrelationen zu erklären?

Anleitung zu (a): Wir können die perfekten Korrelationen erklären, indem wir annehmen, dass die Resultate in jedem Lauf des Experiments für beide Atome bereits vor den Messungen jeweils identisch festgelegt waren, z.B. $\sigma_\alpha^{(i)} = J, \sigma_\beta^{(i)} = N$ und $\sigma_\gamma^{(i)} = N$ für beide i. Es gibt $2^3 = 8$ solcher Kombinationen, die von Lauf zu Lauf des Experiments variieren können, aber jedes mal ist das Paar perfekt korreliert:

$$\sigma_q^{(1)} = \sigma_q^{(2)} \quad \forall q \in \{\alpha, \beta, \gamma\} \ . \tag{1}$$

Betrachten Sie nun die Summe $P(\sigma_\alpha^{(1)} = \sigma_\beta^{(2)}) + P(\sigma_\beta^{(1)} = \sigma_\gamma^{(2)}) + P(\sigma_\gamma^{(1)} = \sigma_\alpha^{(2)})$, setzen Sie die perfekten Korrelationen (1) ein und schätzen Sie diesen Ausdruck mithilfe der Subadditivität durch den Ausdruck $P\left((\sigma_\alpha^{(1)} = \sigma_\beta^{(1)}) \cup (\sigma_\beta^{(1)} = \sigma_\gamma^{(1)}) \cup (\sigma_\gamma^{(1)} = \sigma_\alpha^{(1)})\right)$ ab. Argumentieren Sie, dass von diesen drei Ereignissen immer eines eintreten muss, die Vereinigung also ein *sicheres Ereignis* und die Wahrscheinlichkeit folglich gleich 1 ist. Wenn Sie alles richtig gemacht haben, haben Sie gezeigt, dass unter der entsprechenden Annahme als Erklärung für die perfekten Korrelationen $\frac{3}{4} \geq 1$ ist.

Bemerkung: Die genannten relativen Häufigkeiten werden für bestimmte zweiteilchen-Systeme von der Quantenmechanik vorhergesagt und mit großer Präzession in vielen Experimenten bestätigt. Der Ausdruck $P(\sigma_\alpha^{(1)} = \sigma_\beta^{(2)}) + P(\sigma_\beta^{(1)} = \sigma_\gamma^{(2)}) + P(\sigma_\gamma^{(1)} = \sigma_\alpha^{(2)}) \geq 1$ ist eine Version der berühmten Bellschen Ungleichung die durch die Quantenmechanik und die Experimente verletzt wird.

Abgabe: Montag, 13.5.2013 , 12 Uhr.