Übungen zur Stochastik

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 1

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass für die Wahrscheinlichkeiten von Vereinigungen von Ereignissen A, B, C folgende Rechenregeln gelten:

(a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

(b) $$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Aufgabe 2

In einer Spielshow stehen drei Tore zur Auswahl. Hinter einem der Tore wartet ein tolles Auto - hinter den beiden anderen jeweils eine Ziege. Nachdem sich der Kandidat für eines der drei Tore entschieden hat, öffnet der Moderator eines der beiden anderen, hinter welchem sich eine Ziege befindet. Daraufhin bietet er dem Kandidaten an, von seiner ersten Wahl abzulassen und das Tor zu wechseln. Da der Kandidat ein großer Fan der Show ist und alle Folgen kennt, ist ihm bekannt, dass der Moderator nicht in jeder einzelnen Folge so vorgeht. Er weiß sogar ganz genau, dass der Moderator durchschnittlich folgendermaßen handelt: Liegt der Kandidat (natürlich ohne es selbst zu wissen) mit seiner ersten Wahl richtig, dann öffnet der Moderator in acht von zehn Fällen ein Tor und bietet daraufhin den Wechsel an. Liegt der Kandidat mit der ersten Wahl danaben, so öffnet der Moderator nur in drei von zehn Fällen ein Tor und bietet den Wechsel an. In allen übrigen Fällen, ist das Spiel mit der ersten Wahl des Kandidaten beendet.

(a) Lohnt es sich für den Kandidaten gemäß seiner Erfahrung, das Angebot zu wechseln anzunehmen?

(b) Wie müsste der Moderator langfristig vorgehen, damit sich die Gewinnchancen durch einen Wechsel von ein auf zwei Drittel erhöhen?

(c) Stellen Sie sich die oben geschilderte Situation vor, mit dem Unterschied, dass der Kandidat nichts über das Verhalten des Moderators weiß. Lohnt es sich in diesem Fall (und es ist wohl dieser Fall, der der tatsächlichen Situation in einer Spielshow am ähnlichsten ist) den Wechsel anzunehmen?

Aufgabe 3

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei einem Wurf mit zwei fairen Würfeln die Augensumme *drei* zu erhalten.

Warum kommt nicht $\frac{1}{11}$ heraus (denn bei einem Wurf mit zwei Würfeln sind für die Augensumme 11 Ergebnisse möglich)? Wie sieht der Raum der Elementarereignisse aus?

(b) Eine von drei Karten sei beidseitig schwarz (ss), eine beidseitig rot (rr) und eine habe eine schwarze und eine rote Seite (sr). Sie ziehen aus den drei Karten blind eine heraus und legen Sie auf den Tisch. Wenn die sichtbare Seite rot ist, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die andere Seite schwarz ist? Ist dieses Spiel fair?

Aufgabe 4

(a) Sie erfahren von Ihrer Gesprächspartnerin, dass sie Mutter zweier Kinder ist.

(i) Sie erfahren, dass das ältere Kind ein Mädchen ist. Wie groß ist Wahrscheinlichkeit, dass das jüngere Kind auch ein Mädchen ist?

(ii) Sie erfahren, dass mindestens eines der Kinder ein Mädchen ist. Überlegen Sie sich, wie groß wohl in diesem Falle die Wahrscheinlichkeit ist, dass auch das andere Kind ein Mädchen ist.

(b) Wir wollen nun den Fall (a)(ii) genauer untersuchen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kinder Mädchen sind, wenn Sie die Information aus (a)(ii) folgendermaßen gewonnen haben:

(i) Auf die Frage, ob beide Kinder Jungen seien, antwortet Ihre Gesprächspartnerin: *Nein.*

(ii) Sie fragen: *Denke an eines Deiner Kinder (wähle zufällig eines aus). Welches Geschlecht hat dieses?* Sie antwortet: *Es ist ein Mädchen.*

Bemerkungen: Wir gehen natürlich davon aus, dass es für werdende Eltern genauso wahrscheinlich ist einen Jungen zu bekommen wie ein Mädchen. Malen Sie sich alle möglichen Kombinationen auf und überlegen sie sich, welche durch die jeweiligen Informationen ausgeschlossen sind.

Wenn Sie alles richtig gemacht haben, dann zeigt Ihnen Aufgabenteil (b), dass die Informationen aus (a)(ii) nicht ausreichen, um die Wahrscheinlichkeiten *eindeutig* zu modellieren; es ist vielmehr auch relevant, auf welchem Wege die Informationen gewonnen wurden.

Abgabe: Montag, 29.4.2013 , 12 Uhr.