

Klausur zur Stochastik

Nachname: Vorname:.....

Matrikelnummer: Studiengang:

Geburtsdatum:

1	2	3	4	5	Σ

Bitte beachten Sie:

- (a) **Geben Sie bitte zu jeder Aufgabe mindestens ein Blatt ab, auf dem mindestens Aufgabennummer und Ihr Name steht (auch dann, wenn Sie die Aufgabe nicht bearbeitet haben)!**
- (b) **Bitte tragen Sie auf jedem Blatt, das Sie abgeben, Ihren Namen ein!**
- (c) Arbeitszeit: 10:10 - 11:50 Uhr.
- (d) Zugelassene Hilfsmittel: Schreibgerät.
- (e) **Schreiben Sie auf gar keinen Fall Lösungsvorschläge zu verschiedenen Aufgaben auf das selbe Blatt!**
- (f) Jede Aufgabe gibt die selbe Punktzahl.
- (g) Bei Bedarf kann zusätzlich Papier angefordert werden.

Viel Erfolg!

Aufgabenstellung

Aufgabe 1.

- (a) Sie wetten, dass in einer 10er Reihe von Münzwürfen keinmal Kopf kommt. Wenn Sie verlieren, zahlen Sie 10 Euro, wenn Sie gewinnen, bekommen Sie 100 Euro. Würden Sie spielen?
- (b) Nun kommt tatsächlich kein Kopf in der 10er Reihe. Ihre Gegenspielerin will noch einmal spielen. Sie sagen: „Wenn die Münze nun noch einmal 10 mal geworfen wird, dann wette ich ja de facto, dass bei 20 Würfeln kein Kopf kommt. Das ist für mich ja schlechter als im vorigen Spiel.“ Haben Sie recht?

Begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 2.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Gruppe von 10 Personen mindestens zwei am gleichen Tage des Jahres Geburtstag haben. Vereinfachen Sie Ihr Ergebnis so weit wie ohne Taschenrechner möglich.

Aufgabe 3.

Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz einer exponentialverteilten Zufallsgröße X mit Parameter $\lambda > 0$, d.h. mit der stetigen Dichte

$$\rho(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Aufgabe 4.

Seien $(X_j)_{j \in \mathbb{N}}$ gleichverteilte, paarweise unabhängige kontinuierliche Zufallsgrößen mit endlichem Erwartungswert μ und endlicher Varianz σ^2 . $\bar{X}_n$ sei das arithmetische Mittel: $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j$. Zeigen Sie, dass $\bar{X}_n$ einem schwachen Gesetz der großen Zahlen genügt. Die Ungleichung von Tschebychew dürfen Sie als gegeben voraussetzen.

Aufgabe 5.

Sei $(A_i)_{i \in I}$ eine disjunkte Zerlegung der Ereignismenge Ω , d.h. $\Omega = \cup_{i \in I} A_i$ sowie $A_i \cap A_j = \emptyset \forall i \neq j \in I$, mit $P(A_i) > 0 \forall i \in I$. Weiter sei B ein Ereignis mit $P(B) > 0$. Beweisen Sie die *Formel von Bayes*:

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j) \cdot P(B|A_j)}{\sum_{i \in I} P(A_i) \cdot P(B|A_i)}$$

für beliebiges $j \in I$.