Der Satz des Pythagoras. Kein Darwinscher Zufall

Detlef Dürr

duerr@rz.mathematik.uni-muenchen.de

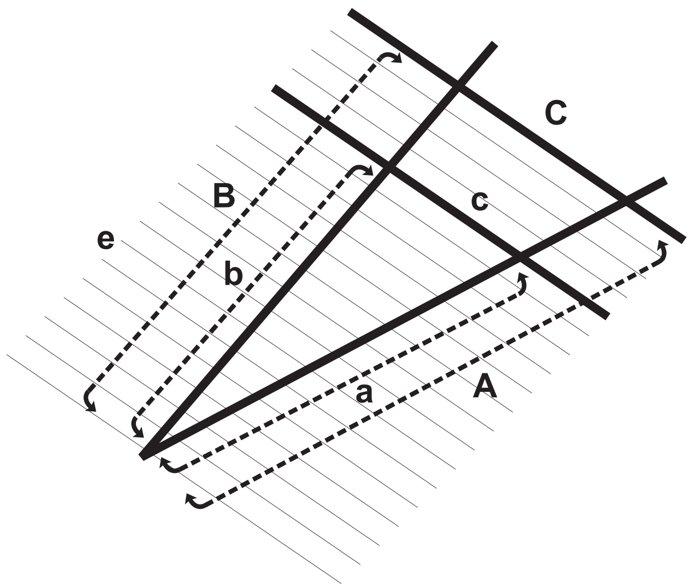
1. Mai 2012

1 Zahlen-Verhältnisse

Die Grunderkenntnis der Gesetzmäßigkeit in der Natur ist Harmonie. Heute sagen wir stattdessen: Schönheit oder Einfachheit. Naturgesetze sind einfach und schön. Das hat etwas mit Gefühl zu tun. Man meint, dass dieses Bedürfnis nach Harmonie und Schönheit zutiefst menschlich ist. Diese Meinung erklärt jedoch in keiner Weise, warum die Gesetze der Natur diesem menschlichen Bedürfnis entsprechen. Es gibt die Möglichkeit dies dem Zufall zuzuschreiben, zufällig gelten Gesetze nach unserem Geschmack. Und wenn wir ein neues Gesetz finden, dann ist es ebenso zufällig gültig. Das aber ist gegen die Natur des Zufalls.

Eine andere Möglichkeit der Erklärung des *Erfolges* der menschlichen Suche nach Harmonie ist es zu sagen, dass der Mensch die Dinge solange hin und her gedreht hat, bis sie vom Erfolg gekrönt waren. Einem scheinbaren Erfolg, denn im Grunde haben wir nur unsere Sprache und unsere Mathematik effektiv den Gegebenheiten angepasst. Rationalisiert. Aber das ist unwahr, so sind die Erfolge nicht erzielt worden. Die Wahrheiten sind entdeckt worden, überraschende Wahrheiten und übermenschliche Wahrheiten. Rationalisiert, d.h. begradigt wird – wenn überhaupt – nur der Weg zu den Grundwahrheiten.

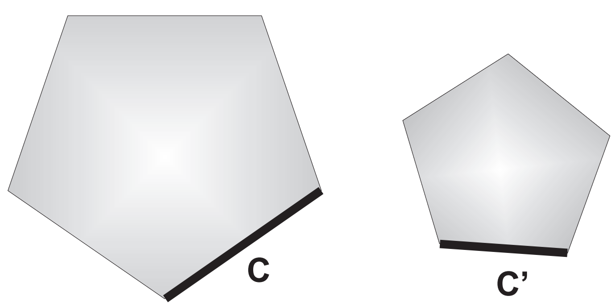
Harmonie führt zur Betrachtung von Verhältnissen. Der Strahlensatz ist eine grundlegende Bildung von Verhältnissen. Der Strahlensatz ist offenbar, dennoch sollte man die Aussagen streng beweisen. Im Falle kommensurabler Strecken-Abschnitte (d.h. die Abschnitte B,b bzw. C,c oder A,a besitzen jeweils für sich ein gemeinsames Maß, d.h. einen grössten gemeinsamen Teiler) ist der Beweis durch ganz einfaches Abzählen zu machen.



Es gelten: $B/b = A/a = C/c$. Hierbei ist e gemeinsames Maßvon B und b (kommensurabler Fall! Wir sehen dann sofort, dass auch A und a sowie C und c kommensurabel sind). Damit ist B/b=A/a offenbar.

Aus dem Strahlensatz folgt sofort: Die Flächen ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate der Grundseiten. Man überlege sich hierfür einen geometrischen Beweis.

Dieser Satz führt uns zu weiteren Wahrheiten. Man errichte über einer Seite c ein (beliebiges) Vieleck V und betrachte eine dazu ähnliche Figur V' mit Grundseite c'.

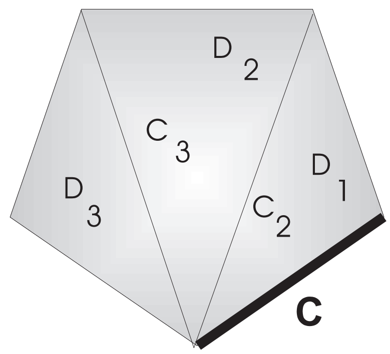


Mit dem obigen folgt nun leicht für das Verhältnis der Flächen:

$$\frac{F(V')}{F(V)} = \frac{F(\Box_{c'})}{F(\Box_c)},$$

wobei $\Box_c$ das Quadrat über der Seite c bezeichnet. Es gilt also: Die Flächen ähnlicher Figuren verhalten sich wie die Quadrate über den jeweiligen Grundseiten.

Zum Beweis teile man das Vieleck von einer Ecke aus in Dreiecke $D_1, D_2, ..$ auf, mit Grundseiten $C_1 = C, C_2, ...$



Dann ist $F(V) = D_1 + D_2 + ...$ und $F(V') = D'_1 + D'_2 + ...$ Nun gilt, da D_1 und D_2 die Seite C_2 gemeinsam haben:

$$\frac{F(D_1)}{F(D'_1)} = \left(\frac{C}{C'}\right)^2 = \left(\frac{C_2}{C'_2}\right)^2 = \frac{F(D_2)}{F(D'_2)} \tag{1}$$

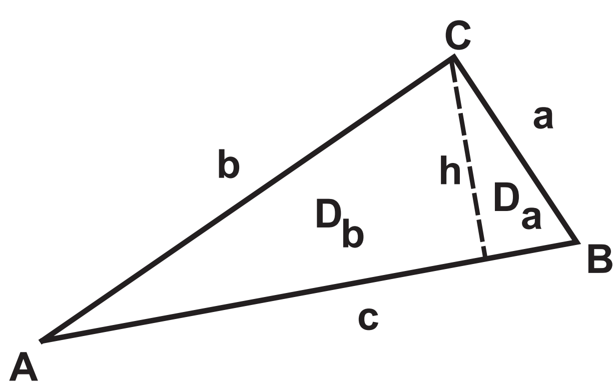
und das setzt sich fort. Daraus ergibt sich dann schnell die obige Aussage. Dies ist wohlbekannt für Quadrate und Halbkreise.

Damit gilt für je zwei Figuren W und V über c und deren ähnliche W' und V' über c'

$$\frac{F(V')}{F(V)} = \frac{F(W')}{F(W)} \tag{2}$$

2 Rechtwinklige Dreiecke

Sei ACB ein rechtwinkliges Dreieck, mi a, b Katheten und c die Hypothenuse. Fällt man von C ein Lot auf die (gegenüberliegende) Hypothenuse c zerfällt das ursprüngliche Dreieck D_c in zwei ähnliche Dreiecke D_a, D_b, ähnlich zu D_c. Die Ähnlichkeit ist offenbar. Man kann sie jedoch durch Winkelbilanzen rechtfertigen. Das ist die Eigenschaft rechtwinkliger Dreiecke.



3 Pythagoras

Zunächst ist offenbar $F(D) = F(D_a) + F(D_b)$. Errichte nun ähnliche Figuren V_a, V_b, V_c über den Seiten a, b, c. Dann folgt mit (2), dass $F(V_k) = pF(D_k)$, $k = a, b, c$ mit einer Proportionalitätskonstanten p, und so gilt

$$F(V_a) + F(V_b) = F(V_c).$$

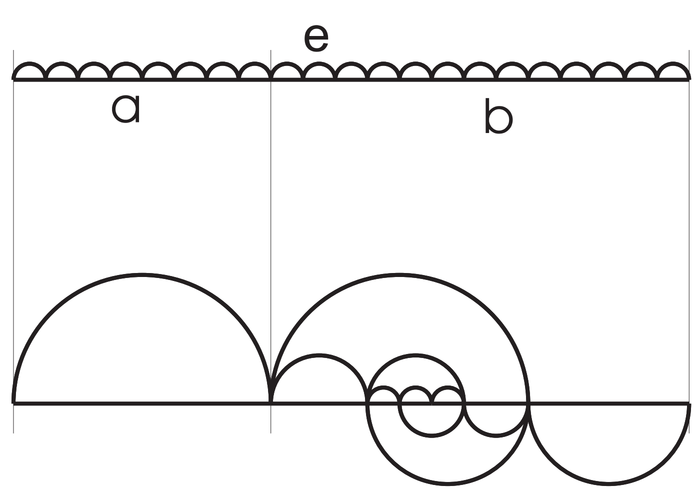
Für Quadrate V ist der Satz als Satz von Pythagoras im Volksmund bekannt.

4 Inkommensurabilität

Gibt es Strecken, die kein gemeinsames Maß besitzen, also inkommensurabel sind? Gilt dann noch der Strahlensatz? Wie findet man überhaupt ein gemeinsames Maß?

4.1 Euklidischer Algorithmus

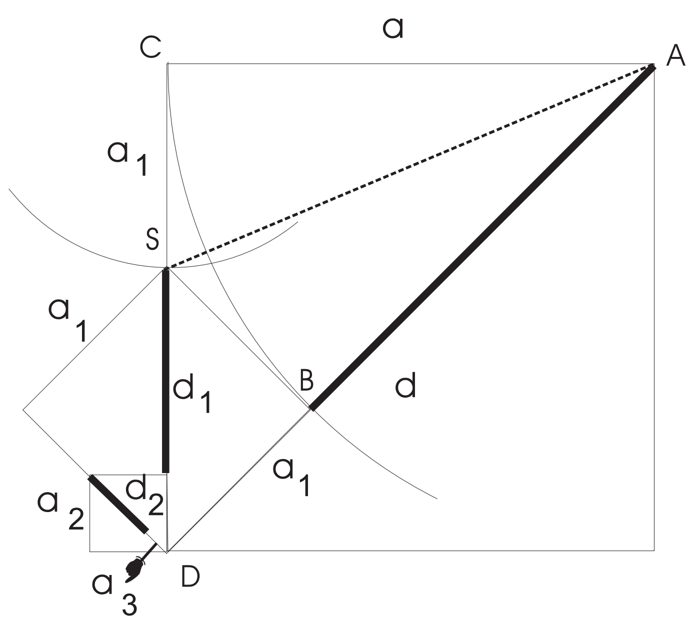
Man habe zwei Größen A, B. Sei B die kleinere. Dann entferne von A die Größe B so oft, bis ein Rest R_1 kleiner als B übrig bleibt. Nun wiederhole man das Verfahren für das Paar B, R_1. Wenn ein Rest $R_2 < R_1$ bleibt, verfahre weiter mit dem Paar R_1, R_2. Das Verfahren endet im n-ten Schritt wenn der Rest $R_{n+1} = 0$ ist. Dann ist $e = R_n$ gemeinsames Maß von A, B, oder der sogenannte größte gemeinsame Teiler. Dieses Verfahren nennt man *Wechselwegnahme* oder auch den *euklidischen Algorithmus*.



Gibt es Strecken, die kein gemeinsames Maß besitzen? Was bedeutet das dann? Der euklidische Algorithmus hört nie auf!

4.2 Diagonale und Seite eines Quadrates sind inkommensurabel

Man betrachte ein Quadrat der Seitenlänge a und Diagonale d. Trage a auf d ab. Man sieht, es bleibt ein Rest a_1, den wir nun auf a abtragen müssen, um dem euklidischen Algorithmus zu genügen. Aber dies führt zur Konstruktion eines neuen Quadrates, wobei a_1 die Seite des neuen Quadrates wird. Siehe Figur. Dass in der Tat ein neues Quadrat entsteht ist zunächst nicht offenbar. Aber wenn man eine Linie von S nach A zieht, teilt man den Drachen ACSB in zwei rechtwinklige Dreiecke. Das Dreieck ABS ist rechtwinklig, weil man an S als den Lotpunkt von B aus gefällt denken kann. Damit sind ABS und ACS kongruent. Daher muss die Strecke $\overline{BS} = \overline{CS}$ sein. Andererseits muss wegen dem rechten Winkel zwischen den Seiten $\overline{BS}$ und $\overline{BD} = a_1$ das Dreieck SBD gleichschenklig sein. Damit also ist $a_1 = \overline{BS} = \overline{CS}$. Auf der neuen Diagonale d_1 trage die neue Seite a_1 ab, das gibt einen neuen Rest a_2, der gemäß dem euklidischen Algorithmus wieder auf a_1 abgetragen wird, und damit wieder die neue Seite eines weiteren Quadrates wird. Diese selbstähnliche Konstruktion bricht offenbar nie ab, denn das Bild wiederholt sich, nur verkleinert, in jedem Schritt.



Offenbar gilt

$$d = a + a_1, \quad a = d_1 + a_1$$
$$d_1 = a_1 + a_2, \quad a_1 = d_2 + a_2$$

usw. Man sieht leicht:

$$\frac{d}{a} = 1 + \frac{a_1}{a} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{d_1}{a_1}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\dots}}}.$$

Das ist ein nie abbrechender Kettenbruch. Er definiert eine neue Zahl: $\sqrt{2}$. Man kann dies auch als Iterationsverfahren lesen. Nenne $a = a_0$ und $d = d_0$, dann gilt offenbar

$$d_0 = 2a_0 - d_1 \text{ bzw. } d_1 = 2a_0 - d_0$$

$$a_0 = d_1 + a_1 \text{ bzw. } a_1 = a_0 - d_1$$

oder im k-ten Schritt

$$d_{k+1} = 2a_k - d_k$$

$$a_{k+1} = a_k - d_{k+1}.$$

Hier gehen wir von dem großen Quadrat zu den kleinen. Wir kehren das nun um, und gehen von kleinen zu großen Quadraten. $k+1$ wird also k und k wird $k+1$. Indem man etwas umstellt kommt also

$$a_{k+1} = a_k + d_k$$
$$d_{k+1} = 2a_{k+1} - d_k.$$

Diese Iteration können wir nun losgelöst von der Konstruktion sehen und z.B. mit $a_0 = 1, d_0 = 1$ beginnen:

a_k	d_k	d_k/a_k
1	1	1
2	3	2/3
5	7	5/7
.	.	.

Man wird erstaunt sein, wie schnell die letzte Zahlenreihe $\sqrt{2}$ approximiert. Die ersten beiden Zahlenkolonnen sind übrigens aus der pythagoräischen Zeit überliefert. Die Pythagoreer hatten auch schon bewiesen: $d_k^2 = 2a_k^2 \pm 1$, wobei das Vorzeichen in jedem Iterationsschritt wechselt. Man überlege sich, warum dies die gewünschte Näherung zeigt.

5 Verhältnisse und Strahlensatz

Gelten der Strahlensatz – und damit die aus ihm folgenden Resultate – auch für inkommensurable Strecken? Natürlich tun sie das, dennoch sollten wir auch hier auf einen strengen Beweis bestehen.

Zuerst müssen wir fragen was es bedeuten soll, im inkommensurablen Fall, dass Streckenverhältnisse gleich sind. Im kommensurablen Fall, erinnern wir uns, bedeutete es folgendes: Es haben die Strecken A und a ein gemeinsames Maß e und die Strecken B und b ein gemeinsames Maß e'. Es gibt also natürliche Zahlen

n, m, n', m' mit $A = ne, a = me, B = n'e, b = me'$. Dann ist das Streckenverhältnis A/a gleich dem Streckenverhältnis B/b genau dann wenn gilt: $n/m = n'/m'$, also $A/a = B/b = n/m$ oder $mA = na$ und $mB = nb$. Die folgende Verallgemeinerung geht auf Eudoxos zurück und wird von Euklid in seinen *Elementen* verwendet:

> das Verhältnis der Strecken A und a ist gleich dem Verhältnis der Strecken B und b wenn für alle natürlichen Zahlen n und m einer der folgenden drei Fälle gilt
>
> $$\begin{array}{rl} & mA < na \text{ und } mB < nb \\ \text{oder} & mA = na \text{ und } mB = nb \\ \text{oder} & mA > na \text{ und } mB > nb. \end{array}$$

Hierbei kann der zweite Fall nur dann eintreten, wenn die Strecken kommensurabel sind. Dies ist eine Definition, aber diese Definition ist nicht willkürlich. Vielmehr wird das, was man vernünftigerweise im Sinn hat, präzise gefasst.

Eine andere Möglichkeit, die unmittelbarer auf den Strahlensatz anwendbar ist, stammt von Aristoteles: *das Verhältnis der Strecken a und A ist gleich dem Verhältnis der Strecken b und B, wenn sie die gleiche Wechselwegnahme haben.*

Für die Geradenabschnitte im Strahlensatz ist dies offenbar wahr, denn wir können die Wechselwegnahme entlang der Parallelen zu C von einem Strahl auf den anderen übertragen. Für inkommensurable Strecken bricht der euklidische Algorithmus nie ab, aber in jedem Schritt erhält man auf beiden Strahlen das gleiche Teilverhältnis (plus Rest).

Mit der Entdeckung der Inkommensurabilität und irrationaler Verhältnisse, hält somit auch die Unendlichkeit Einzug in die Mathematik.

6 Denken

Punkt, Gerade, rechter Winkel sind anschauliche Begriffe, die außer Frage der menschlich begrenzten Sicht entsprechen. Aber für diese Dinge gelten übermenschliche Wahrheiten, die wir trotz unserer Begrenztheit entdecken können. Es ist kein Planspiel des menschlichen Geistes, die Wahrheiten sind nicht wahr, weil die Dinge so hin konstruiert wurden. Der Beweis des Satzes des Pythagoras ist sicher eine große Leistung des Denkens, seine Gültigkeit ist jedoch weder zufällig noch entspringt sie menschlicher Planung. Die Gesetzmäßigkeit des Satzes ist kein Phänomen des Zufalls. Dass zu sagen, wäre gegen den Sinn des Zufalls.