Die reellen Zahlen nach Dedekind

Dustin Lazarovici*

25. November 2013

Die Idee der *ZAHL* entspringt der Beobachtung von *Verhältnissen* und der ungeheuren Denkleistung, diese Verhältnisse als unabhängig von der Art der beobachteten Objekte zu begreifen. Es ist ja eine grandiose Abstraktionsleistung zu erkennen, was einer Gruppe von 30 Menschen und einer Ansammlung von 30 Steinen gemein ist und was dies wiederum mit den Bewegungen von Sonne und Mond zu tun haben kann.

Die Pythagoreer waren von diesen Einsichten dermaßen erfüllt, dass sie in wiederkehrenden Zahlenverhältnissen eine göttliche Harmonie erkannten und verkündeten: alles ist Zahl. Diese kosmische Harmonie fanden sie vor allem in drei Disziplinen, in der Astronomie, in der Harmonielehre der Musik und in der Geometrie.

In der Geometrie ist die Betrachtung von Streckenverhältnissen grundlegend. Gegeben seien vier Strecken A, a, B, b. Was bedeutet es, wenn wir sagen, dass sich A zu a verhält, wie B zu b? Angenommen die Strecken seien *kommensurabel*, es haben also A und a ein gemeinsames Maß e und die Strecken B und b ein gemeinsames Maß e'. Dann existieren natürliche Zahlen n, m, n', m' mit

$$A = ne, a = me, B = n'e', b = m'e'.$$

Abstrakte *ZAHLEN* kommen also erst durch ein gemeinsames Maß ins Spiel, welches uns etwa gestattet zu sagen, die eine Strecke sei 3 Mal dieses Maß und die zweite Strecke 17 Mal usw. . Nun können wir ganz einfach sagen, das Streckenverhältnis $A : a$ ist gleich dem Streckenverhältnis $B : b$ genau dann wenn gilt $n/m = n'/m'$, also

$$mA = na \text{ und } mB = nb.$$

Dann können wir auch schreiben: $A : a = B : b = n/m$. Das Verhältnis der Strecken entspricht also einer *rationalen Zahl*.

*Dustin.Lazarovici@mathematik.uni-muenchen.de

Nun ist uns aber eine Tatsache bekannt, die schon von den Pythagoreern entdeckt wurde und ihr Weltbild zunächst erschüttern ließ: Es existieren Strecken, die *inkommensurabel* sind, die also kein gemeinsames Maß haben und deren Längenverhältnis man folglich nicht als Verhältnis ganzer Zahlen ausdrücken kann. Was bedeutet es dann aber im inkommensurablen Fall zu sagen, das Verhältnis $A : a$ sei gleich dem Verhältnis $B : b$?

Die folgende Definition geht auf Eudoxos zurück und wird auch von Euklid in seinen *Elementen* verwendet:

Wir sagen, das Verhältnis der Strecken A und a ist gleich dem Verhältnis der Strecken B und b, wenn für alle natürlichen Zahlen n und m gilt:

$$\begin{aligned} & mA < na \text{ und } mB < nb \\ \text{oder } & mA = na \text{ und } mB = nb \\ \text{oder } & mA > na \text{ und } mB > nb. \end{aligned}$$

(Hierbei kann der mittlere Fall offenbar nur für kommensurable Strecken eintreten.) Streckenverhältnisse sind mit diesem Begriff von Gleichheit eine sinnvolle Größe. Und so können wir das Verhältnis $A : a$ selbst als *ZAHL* begreifen – man denke etwa an das Verhältnis von Seitenlänge und Diagonale im Quadrat, das wir heute $\sqrt{2}$ nennen. Stellt man obige Definition um, so sieht man, dass man eine solche *ZAHL* also nicht immer in den rationalen Zahlen verorten kann, jedoch *teilt* sie die Menge der rationalen Zahlen derart, dass für jedes $\frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$ gilt:

$$\frac{n}{m} < A : a \text{ oder } \frac{n}{m} \geq A : a.$$

Dies ist nun die geniale Idee hinter der Konstruktion der reellen Zahlen nach Richard Dedekind (1872): Eine reelle Zahl entspricht einem *Schnitt* in den rationalen Zahlen, der $\mathbb{Q}$ in eine *Obermenge* und eine *Untermenge* teilt. *ZAHL* wird somit etwas sehr abstraktes. Anschaulicher können wir über einen solchen Schnitt so denken, dass er einen Punkt im *Kontinuum* (d.h. auf dem Zahlenstrahl) auszeichnet, sodass jede rationale Zahl entweder darüber oder darunter liegt (oder eben, im rationalen Fall, mit ihm identisch ist). Wir werden dann zeigen, dass die Menge dieser *Dedekindschen Schnitte* tatsächlich die Eigenschaften eines Kontinuums hat, wir uns also jeden Punkt auf dem Zahlenstrahl als einen solchen Schnitt vorstellen können.

Definition: Dedekindsche Schnitte.
Eine Teilmenge $\alpha \subset \mathbb{Q}$ heißt *Untermenge* eines Dedekindschen Schnittes, wenn gilt:

i) $\alpha \neq \emptyset$, $\alpha \neq \mathbb{Q}$.

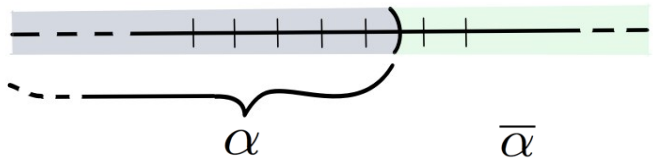
ii) Ist $q \in \alpha$ und $p < q$, dann ist auch $p \in \alpha$.

iii) α hat kein größtes Element, d.h. $\forall q \in \alpha \, \exists r \in \alpha : r > q$.

Ein *Dedekindscher Schnitt* ist nun ein Paar $(\alpha, \overline{\alpha})$, wobei α eine Untermenge ist und $\overline{\alpha} = \mathbb{Q} \setminus \alpha$ das Komplement der Untermenge in $\mathbb{Q}$, das man entsprechend eine *Obermenge* nennt.

Die Menge aller Dedekindschen Schnitte in $\mathbb{Q}$ bezeichnen wir zunächst mit $\mathcal{R}$.

Diese Menge ist *angeordnet*. Für $(\alpha, \overline{\alpha}), (\beta, \overline{\beta}) \in \mathcal{R}$ sagen wir $(\alpha, \overline{\alpha}) \leq (\beta, \overline{\beta})$ genau dann wenn $\alpha \subseteq \beta$. Diese Definition ist nicht nur natürlich, sondern auch sinnvoll. Der Schnitt $(\alpha, \overline{\alpha})$ stellt ja eine kleinere Zahl dar als $(\beta, \overline{\beta})$, wenn er auf dem "Zahlenstrahl" unterhalb von diesem verläuft.



Rationale Schnitte

Manche Schnitte werden von rationalen Zahlen erzeugt. Anschaulich bedeutet das dann, dass der Punkt im Kontinuum, entlang dem der Schnitt verläuft, einer rationalen Zahl entspricht. Konkret definiert jede rationale Zahl $q \in \mathbb{Q}$ einen Dedekindschen Schnitt $q^* := (\alpha_q, \overline{\alpha}_q)$, mit

$$\alpha_q := \{r \in \mathbb{Q} \mid r < q\}$$

Die Untermenge besteht also aus den rationalen Zahlen kleiner als q, die Obermenge aus den rationalen Zahlen $\geq q$. Dies definiert eine Einbettung von $\mathbb{Q}$ in $\mathcal{R}$:

$$* : \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathcal{R}, \; q \mapsto q^*$$

Die allermeisten Schnitte werden aber *nicht* durch eine rationale Zahl erzeugt – und das sind gerade die interessanten, nämlich jene, die irrationalen Zahlen entsprechen! Man macht sich leicht klar, dass ein Dedekindscher Schnitt $(\alpha, \overline{\alpha})$ rational ist genau dann wenn α in $\mathbb{Q}$ ein *Supremum* q besitzt. Nach Eigenschaft *iii*) der Schnitte kann ein solches Supremum kein Maximum sein, also nicht selbst in der Untermenge liegen. Es ist dann allerdings das *Minimum* der Obermenge $\overline{\alpha}$, die wir somit schreiben können als $\overline{\alpha} = \{r \in \mathbb{Q} \mid r \geq q\}$, und offenbar gilt dann $\alpha = q^*$.

Betrachten wir nun aber zum Beispiel den Schnitt $(\beta, \overline{\beta})$ mit

$$\beta := \{r \in \mathbb{Q} \mid r^2 < 2 \vee r < 0\}.$$

Wir zeigen, dass dieser nicht von einer rationalen Zahl erzeugt sein kann. Nehmen wir ein $t \in \overline{\beta}$ aus der Obermenge, also eine obere Schranke von β. Dieses erfüllt dann $t^2 \geq 2$, tatsächlich sogar $t^2 > 2$, denn wir wissen, dass in $\mathbb{Q}$ keine Zahl existiert mit $t^2 = 2$. Dann ist $0 < \frac{t^2-2}{t+2} < t$ und wenn wir

$$u := t - \frac{t^2 - 2}{t + 2} = \frac{2t + 2}{t + 2}$$

betrachten, gilt einerseits $0 < u < t$ und außerdem

$$u^2 - 2 = 2\frac{t^2 - 2}{(t + 2)^2} > 0,$$

also $u^2 > 2$. Somit ist u kleiner als t und ebenfalls in $\overline{\beta}$, also obere Schranke von β. Folglich besitzt β kein Supremum, denn zu jeder oberen Schranke in $\mathbb{Q}$ können wir eine noch kleinere obere Schranke finden. Der Schnitt $(\beta, \overline{\beta})$ ist somit nicht rational – tatsächlich entspricht er der irrationalen Zahl $\sqrt{2}$.

Wir haben hier nicht gezeigt, dass $\sqrt{2}$ irrational ist – das wissen wir bereits aus dem ersten Vortrag. Wir haben vielmehr gesehen, dass die Irrationalität von $\sqrt{2}$ etwas damit zu tun hat, dass die nach oben beschränkte Untermenge β in $\mathbb{Q}$ kein Supremum besitzt. Das ist, ganz allgemein, eine wesentliche Art und Weise um die *Unvollständigkeit* von $\mathbb{Q}$ zu begreifen. Die Menge der rationalen Zahlen besitzt Teilmengen, die nach oben beschränkt sind, aber in $\mathbb{Q}$ keine *kleinste* obere Schranke besitzen. Und auf Grund unserer Betrachtung verstehen wir warum dies bedeutet, dass $\mathbb{Q}$ kein *Kontinuum* ist: Es gibt unzählige Möglichkeiten die rationalen Punkte auf dem Zahlenstrahl aufzuteilen in eine Untermenge und eine Obermenge, aber der Punkt entlang dem ein solcher Schnitt verläuft (sollte es nicht einen geben?) ist im allgemeinen selbst nicht rational! Diese irrationalen Schnitte zeigen uns also

sozusagen die "Fehlstellen" in $\mathbb{Q}$ auf – jene Punkte auf dem Zahlenstrahl, die nicht rational sein können und schließlich mit einer *irrationalen Zahl* identifiziert werden.

Vollständigkeit von $\mathcal{R}$

Wir zeigen nun, dass die von uns definierte Menge $\mathcal{R}$ derartige Fehlstellen nicht mehr hat, also vollständig ist. Konkret bedeutet dies, dass wir die *Supremums-Eigenschaft* zeigen: Jede nicht-leere, nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathcal{R}$ besitzt ein Supremum. Wäre dies nicht der Fall, so könnten wir ja wieder nicht-triviale Schnitte in $\mathcal{R}$ finden und das ganze Spiel ginge von vorne los. Es ist also diese Vollständigkeits-Eigenschaft, die uns zeigt, dass die Menge der Dedekindschen Schnitte ein gutes Modell des Kontinuums ist, indem sozusagen alle Punkte des Zahlenstrahls enthalten sind.

Sei also $\mathcal{A} \subset \mathcal{R}$ eine nicht-leere, nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathcal{R}$. Man beachte, dass $\mathcal{A}$ eine Menge von Dedekindschen Schnitten ist, also eine Menge von Paaren von Teilmengen von $\mathbb{Q}$. Wir können nun das Supremum der Menge explizit angeben, und zwar behaupten wir, dass $\sup(\mathcal{A})$ der Dedekindsche Schnitt mit der Untermenge:

$$\xi := \bigcup_{(\alpha,\overline{\alpha})\in\mathcal{A}} \alpha$$

ist, also jener Schnitt, dessen Untermenge die Vereinigung der Untermengen aller Schnitte in $\mathcal{A}$ ist. Hierzu müssen wir zunächst zeigen, dass ξ überhaupt eine Untermenge ist, also einen Dedekindschen Schnitt definiert. Dazu bleibt uns nichts anderes übrig, als die Definition nachzuprüfen:

i) Ist $\mathcal{A}$ nicht leer, dann ist auch $\bigcup_{(\alpha,\overline{\alpha})\in\mathcal{A}} \alpha \neq \emptyset$, denn mindestens ein nicht-leeres α nimmt an der Vereinigung teil. Ist $\mathcal{A}$ nach oben beschränkt, so bedeutet dies, dass eine obere Schranke $(\mu, \overline{\mu}) \in \mathcal{R}$ existiert für die gilt $\alpha \subseteq \mu,\ \forall(\alpha, \overline{\alpha}) \in \mathcal{A}$. Dann ist aber auch $\bigcup_{(\alpha,\overline{\alpha})\in\mathcal{A}} \alpha \subseteq \mu \subsetneq \mathbb{Q}$, also $\xi \neq \mathbb{Q}$.

ii) Sei $q \in \bigcup_{(\alpha,\overline{\alpha})\in\mathcal{A}} \alpha$ und $p < q$. Wir müssen zeigen, dass auch $p \in \bigcup_{(\alpha,\overline{\alpha})\in\mathcal{A}} \alpha$ gilt. Wenn aber q in der Vereinigung liegt, dann in mindestens einer Untermenge α' aus $\mathcal{A}$. In dieser liegt dann aber auch p, weil α' ja die geforderte Eigenschaft erfüllt. Ist aber $p \in \alpha'$, dann erst recht $p \in \bigcup_{(\alpha,\overline{\alpha})\in\mathcal{A}} \alpha$, denn α' nimmt an der Vereinigung teil.

iii) Ähnlich folgt, dass $\bigcup_{(\alpha,\overline{\alpha})\in\mathcal{A}} \alpha$ kein größtes Element besitzt. Denn liegt q in der Vereinigung, dann in mindestens einer Untermenge α'' aus $\mathcal{A}$. In dieser existiert dann aber auch ein $r \in \alpha''$ mit $r > q$.

Nun ist aber leicht zu sehen, dass $(\xi, \overline{\xi})$ tatsächlich das Supremum unserer Menge ist. Denn für jeden Dedekindschen Schnitt $(\beta, \overline{\beta}) \in \mathcal{A}$ ist ja die Untermenge β in der Vereinigung $\xi = \bigcup_{(\alpha,\overline{\alpha})\in\mathcal{A}} \alpha$ enthalten, also gilt $\beta \subseteq \xi$ und damit nach Definition $(\beta, \overline{\beta}) \leq (\xi, \overline{\xi})$. Ist andererseits ein Schnitt $(\mu, \overline{\mu}) \in \mathcal{R}$ eine obere Schranke von $\mathcal{A}$, so bedeutet dies $\alpha \subseteq \mu$ für jedes $(\alpha, \overline{\alpha}) \in \mathcal{A}$ und damit $\xi = \bigcup_{(\alpha,\overline{\alpha})\in\mathcal{A}} \alpha \subseteq \mu$, also $(\xi, \overline{\xi}) \leq (\mu, \overline{\mu})$.
Der von uns definierte Schnitt ist folglich in der Tat die kleinste obere Schranke von $\mathcal{A}$.

Das Archimedische Axiom

Eine weitere wesentliche Eigenschaft des Kontinuums – und damit der reellen Zahlen – wird durch das *Archimedische Axiom* ausgedrückt. Dieses besagt:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : N\epsilon > 1,$$

wobei ϵ eine beliebig kleine, positive reelle Zahl bezeichnet. Wir haben nun mit den Dedekindschen Schnitten ein konkretes Modell der reellen Zahlen und tatsächlich lässt sich an diesem Modell diese (ganz und gar nicht triviale) archimedische Eigenschaft zeigen. Das liegt daran, dass die Supremumseigenschaft sehr "stark" ist und sich das Archimedische Axiom aus ihr folgern lässt. Man nehme nämlich an die Aussage des archimedischen Axioms sei falsch. Dann wäre die Menge $A := \{\epsilon > 0 \mid N\epsilon < 1, \forall N \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{R}$ nicht leer, denn es gäbe mindestens ein "schlechtes" ϵ, dass so klein ist, dass auch jedes ganzzahlige Vielfache davon kleiner ist als 1. Mit ϵ ist dann aber auch jedes ϵ' mit $0 < \epsilon' < \epsilon$ in A, denn sonst gäbe es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $1 < N\epsilon' < N\epsilon$, was im Widerspruch zu $\epsilon \in A$ stünde. Außerdem sehen wir, das A nach oben beschränkt ist, etwa durch 1. Aus der Supremumseigenschaft folgt nun, dass A in $\mathcal{R}$ ein Supremum besitzt, nennen wir es $\delta > 0$. Damit ergibt sich aber sofort ein Widerspruch. Denn es müsste etwa gelten, dass $\delta/2 \in A$ ist, aber $2\delta \notin A$. Das ist aber unmöglich, denn ist $N \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $N \cdot 2\delta > 1$, dann ist $4N$ eine natürliche Zahl mit $4N \cdot \delta/2 = 2\delta > 1$ – im Widerspruch zu $\delta/2 \in A$! Wir schließen, dass $A = \emptyset$ sein muss, was gleichbedeutend mit der Aussage des Archimedischen Axioms ist.

Addition und Multiplikation

Um die Dedekindschen Schnitte letztendlich mit den reellen Zahlen zu identifizieren, müssen wir angeben, wie Addition und Multiplikation für sie definiert sind. Die reellen Zahlen bilden ja einen *Zahlenkörper*. Diese algebraischen Verknüpfungen sind nun für Dedekindsche Schnitte – die ja Paare von Teilmengen von $\mathbb{Q}$ sind – nicht ganz so "natürlich", lassen sich dennoch ohne größere Schwierigkeiten auf einführen. Der Einfachheit halber identifizieren wir hier die Schnitte mit ihrer entsprechenden Untermenge. Anstatt $(\alpha, \overline{\alpha})$ und $(\beta, \overline{\beta})$ schreiben wir also einfach α und β und geben auch deren Summe, bzw. Produkt durch die Untermenge an.

Für $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$ definiert man nun

$$\alpha + \beta := \{r + s \mid \ r \in \alpha,\, s \in \beta\}^1.$$

Man sieht dann sofort, dass der Schnitt 0^* das Inverse der Addition ist.
Das Produkt zweier Schnitte $\alpha, \beta > 0^*$ wird definiert als

$$\alpha \cdot \beta := \{q \in \mathbb{Q} \mid \exists r \in \alpha, s \in \beta, r, s > 0 : q \leq r \cdot s\}.$$

Dies lässt sich in der offensichtlichen Weise auf beliebige Schnitte erweitern: für $\alpha < 0^*, \beta > 0^*$ ist $\alpha \cdot \beta := -(-\alpha) \cdot \beta$ und für $\alpha < 0^*, \beta < 0^*$ ist $\alpha \cdot \beta := (-\alpha) \cdot (-\beta)$.

Man vergewissert sich ferner, dass jedes $0^* \neq \alpha \in \mathcal{R}$ ein Inverses der Multiplikation besitzt. Für $\alpha > 0^*$ ist dies gegeben durch

$$\alpha^{-1} := \{q \in \mathbb{Q} \mid \exists\, \delta > 0 \,\forall\, 0 < r \in \alpha : q \cdot r \leq 1 - \delta\},$$

denn damit gilt

$$\alpha \cdot \alpha^{-1} = \{q \in \mathbb{Q} \mid \exists \delta > 0 : q \leq 1 - \delta\} = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < 1\} = 1^*.$$

Natürlich wäre bei all dem nachzuprüfen, dass die so definierten Summen, Produkte, Inversen Elemente selbst wieder Dedekindsche Schnitte ergeben, ferner dass Assoziativgesetz, Distributivgesetze usw. gelten. Diese Tatsachen sind aber gut einsichtig und wir überlassen die Beweise dem Leser zur Übung.

[1] d.h. $(\alpha, \overline{\alpha}) + (\beta, \overline{\beta})$ ist der Schnitt mit der Untermenge $\{r + s \mid \ r \in \alpha,\, s \in \beta\}$

Was sind nun die reellen Zahlen?

Eine Möglichkeit die reellen Zahlen einzuführen, ist durch eine *axiomatische* Beschreibung, in dem man also ihre wesentlichen Eigenschaften benennt. Sie charakterisieren $\mathbb{R}$ als einen *vollständigen, archimedisch angeordneten Zahlenkörper*. Diese Axiome sind die folgenden:

1) Die algebraischen Axiome (Körperaxiome)

2) Die Anordnungsaxiome

3) Das archimedische Axiom

4) Das Vollständigkeitsaxiom

Für das Vollständigkeitsaxiom gibt es mehrere äquivalente Formulierungen:

a) Supremumseigenschaft: Jede nicht-leere, nach oben beschränkte Teilmenge besitzt ein Supremum.

b) Intervallschachtelungsprinzip: Der Durchschnitt jeder absteigenden Folge von nicht-leeren Intervallen ist nicht leer.

c) Konvergenz von Cauchy-Folgen: Jede Cauchy-Folge ist konvergent.

Wir haben gezeigt, dass die Menge der Dedekindschen Schnitte diese Eigenschaften erfüllt und können deshalb setzen: $\mathbb{R} := \mathcal{R}$.

Die Dedekindschen Schnitte sind also eine *Konstruktion* der reellen Zahlen, man kann auch sagen, ein *Modell* der reellen Zahlen. Es existieren auch andere Konstruktionen, etwa aus Intervallschachtelungen in den rationalen Zahlen, oder, nach Cantor, aus Cauchy-Folgen rationaler Zahlen. Jeder dieser Konstruktionen greift einen anderen Begriff der Vollständigkeit auf. Die Vollständigkeit der reellen Zahlen ist also das Wesentliche, das, was $\mathcal{R}$ zu einem Modell des *Kontinuums* macht. Sie ist auch jene Eigenschaft, die etwa garantiert, dass jede (unendliche) Dezimalfolge tatsächlich einer reellen Zahl entspricht (und umgekehrt). Man denke etwa an:

$$\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419716939937...$$

Damit kann man auch zeigen, dass all diese verschiedenen Konstruktionen in der Tat die "selben" reellen Zahlen ergeben. Genauer gesagt sind alle Körper, welche die Axiome der reellen Zahlen erfüllen, zueinander isomorph.

Am Ende bleibt aber die Frage: Was sind denn nun die *wahren* reellen Zahlen?

Die logische Grundlage der modernen Mathematik bildet die Mengenlehre. In der Mengenlehre konstruiert man alles aus Mengen; die natürlichen Zahlen (nach von Neumann) aus der leeren Menge, die rationalen Zahlen aus den natürlichen Zahlen, die reellen Zahlen als Dedekindsche Schnitte aus den rationalen Zahlen. Es mag also so aussehen, als handle die moderne Mathematik nur von diesen, mit Mengenoperationen konstruierten, Objekten: Mengen von Mengen von Mengen von Mengen... Wenn wir dann von einer reellen Zahl sprächen, meinten wir also in Wahrheit einen Dedekindschen Schnitt, d.h. eine bestimmtes Paar von Teilmengen von IQ. Dieses Sichtweise ist kurios. Sie passt aber gut in den Zeitgeist, denn sie verlangt uns keinen Glauben an die Existenz irgendwelcher abstrakten Dingen ab, bloß eine Akzeptanz der Axiome der Mengenlehre.

Dies war allerdings nicht das Verständnis Richard Dedekind's. Dedekind selbst hat vielmehr *postuliert*, dass zu jedem Schnitt in $\mathbb{Q}$ eine reelle Zahl existiert, die diesen Schnitt erzeugt. Der Schnitt ist somit nur eine Möglichkeit diese abstrakte *ZAHL* zu "benennen", aber keinesfalls mit ihr identisch. Insbesondere *existieren* die reellen Zahlen, nach dieser Sichtweise, unabhängig von uns und unseren Konstruktionen, in einem platonischen Reich der Ideen, zu dem das menschliche Denken aber auf wundervolle Weise Zugang hat.

Diese Fragen führen also zu philosophischen Betrachtungen, die wir hier nicht weiter vertiefen können. Es lohnt sich allerdings weiter über sie nachzudenken, um ein Gefühl dafür zu bekommen, was Mathematik ist.